

ВЕСЦІ

НАЦЫЯНАЛЬнай АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК 2012 № 2

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК 2012 № 2

ЗАСНАВАЛЬНИК — НАЦЫЯНАЛЬНАЯ АКАДЭМІЯ НАВУК БЕЛАРУСІ

Часопіс выдаецца са студзеня 1956 г.

Выходзіць чатыры разы ў год

ЗМЕСТ

МАТЭМАТЫКА

Бодягин И. А., Харин Ю. С. Функция правдоподобия для цензурированных гауссовских временных рядов	4
Гриб Н. В. Приближение сумматорными рациональными операторами 2π -периодических кусочно-выпуклых функций	15
Зверович Э. И. Обобщение формул Сохоцкого	24
Глаз А. Н. Общий вид линейного непрерывного функционала на пространстве кусочно-непрерывных функций	29
Дацк В. Т. Обобщенные средние сопряженного интеграла Фурье функций с существенно ограниченной дробной производной	35
Воробьев С. Н. О формациях Фишера конечных групп	43
Мехович А. П. Прямые разложения τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций	49
Берник В. И., Гётце Ф., Коледа Д. В. Эффективные регулярные системы	54
Шлык В. А. Совместные приближения натуральных чисел суммой целых алгебраических чисел	61
Лапуцкий А. И. О новых алгебраических решениях системы Гарнье с двумя независимыми переменными	64
Борисевич С. А., Камлюк А. Н. Модель гибкого стержня в трехмерном пространстве и ее применение для описания динамики падения ствола дерева	69

ФІЗІКА

Тихомиров В. В., Целков Ю. А. Об ускорении аккреции на первичные черные дыры в присутствии дополнительных измерений	75
Кудряшов В. В., Баран А. В. Точные решения уравнения Шрёдингера для электрона в круговом квантовом кольце с учетом спин-орбитальных взаимодействий	84
Рябушко А. П., Неманова И. Т., Жур Т. А. Движение пробного тела в римановом пространстве-времени, порожденном неоднородной средой с притягивающим центром	89
Анисимова А. Е., Кулак Г. В., Ропот П. И. Преобразование световых пучков при брэгговской дифракции на частотно-модулированной ультразвуковой волне	93
Коршунов Ф. П., Марченко И. Г. Влияние электронного облучения при повышенных температурах на диффузионные структуры с p - n -переходами в кремнии	97
Рыжковский В. М., Гончаров В. С. Магнитная структура сплава $Mn_{1,3}Sb$ по данным нейтронной дифракции	102

ІНФАРМАТЫКА

Лиходед Н. А., Соболевский П. И. Однородные зависимости в алгоритмах, порождаемые тайлами	107
Найденко В. Г. О сложности нахождения второго решения NP -полной задачи	114

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

Гончаренко А. М. Распространение эллиптических световых пучков в круглом селфоке	119
Бахтин В. И. Замечания по поводу одной теоремы А. В. Арутюнова об условном экстремуме	122

ІЗВЕСТІЯ НАЦІОНАЛЬНОЎ АКАДЕМІІ НАУК БЕЛАРУСІ 2012 № 2

Серія фізіка-матэматычных навук

на руском і беларуском мовах

Камп'ютарная вёрстка В. Л. Смольская

Здадзена ў набор 07.05.2012. Падпісана да друку 20.06.2012. Выхад у свет 26.06.2012. Фармат $60 \times 84^{1/8}$. Папера афсетная.

Друк лічбавы. Ум. друк. арк. 14,88. Ул.-выд. арк. 16,4. Тыраж 86 экз. Заказ 115.

Кошт нумару: індывідуальная падпіска – 31330 руб.; ведамасная падпіска – 78294 руб.

Рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Выдавецкі дом «Беларуская навука». ЛІ № 02330/0494405 ад 27.03.2009.

Вул. Ф. Скарыны, 40, 220141, Мінск. Пасведчанне аб рэгістрацыі № 392 ад 18.05.2009.

Надрукавана ў РУП «Выдавецкі дом «Беларуская навука».

© Выдавецкі дом «Беларуская навука»

Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук, 2012

PROCEEDINGS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

PHYSICS AND MATHEMATICS SERIES 2012 N 2

FOUNDER IS THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

The Journal has been published since January 1956

Issued four times a year

CONTENTS

MATHEMATICS

Badziahin I. A., Kharin Yu. S. Likelihood function for censored Gaussian time series	4
Grib N. V. Approximation of 2π -periodic piecewise-convex functions by summation rational operators	15
Zverovich E. I. Generalization of Sokhotski's formulas	24
Hlaz H. N. General view of a linear continuous functional in the space of piecewise continuous functions	29
Dacyk V. T. Generalized averages of conjugate Fourier's integral of the function with an essentially bounded fractional derivative	35
Vorobyov S. N. Fischer's formations of finite groups	43
Mekhovich A. P. Direct decompositions of τ -closed n -multiply ω -composition formations	49
Bernik V. I., Götze F., Koleda D. V. Effective regular systems	54
Shlyk V. A. Simultaneous approximations of natural numbers by sums of integer algebraic numbers	61
Laputski A. New algebraic solutions of the Garnier system with two independent variables	64
Borisevich S. A., Kamluk A. N. Three-dimensional model of an elastic rod and its application for dynamical analysis of the elastic tree stem	69

PHYSICS

Tikhomirov V. V., Tsalkou Y. A. Acceleration of accretion onto primordial black holes in the presence of extra dimensions	75
Kudryashov V. V., Baran A. V. Exact solutions of the Schrödinger equation for an electron in the circular quantum ring taking into account spin-orbit interactions	84
Ryabushko A. P., Nemanova I. T., Zhur T. A. Motion of a test body in the Riemann space-time generated by a nonuniform medium with the attraction center	89
Anisimova A. E., Kulak G. V., Ropot P. I. Transformation of light beams under Bragg's diffraction on the frequency-modulated ultrasonic wave	93
Korshunov F. P., Marchenko I. G. Influence of electron irradiation at elevated temperatures on silicon diffuse structures with p - n -junctions	97
Ryzhkovskii V. M., Goncharov V. S. Magnetic structure of the $Mn_{1.3}Sb$ alloy from the neutron diffraction data	102

INFORMATICS

Likhoded N. A., Sobolevsky P. I. Homogeneous dependences in algorithms generated by tiles	107
Naidenko V. G. Complexity of finding a second solution to a NP -complete problem	114

SHORT NOTES

Goncharenko A. M. Propagation of elliptical light beams in a round selfoc	119
Bakhtin V. I. Comments on one A. V. Arutyunov's conditional extremum theorem	122

МАТЭМАТЫКА

УДК 519.2

И. А. БОДЯГИН, Ю. С. ХАРИН

ФУНКЦИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ ЦЕНЗУРИРОВАННЫХ
ГАУССОВСКИХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

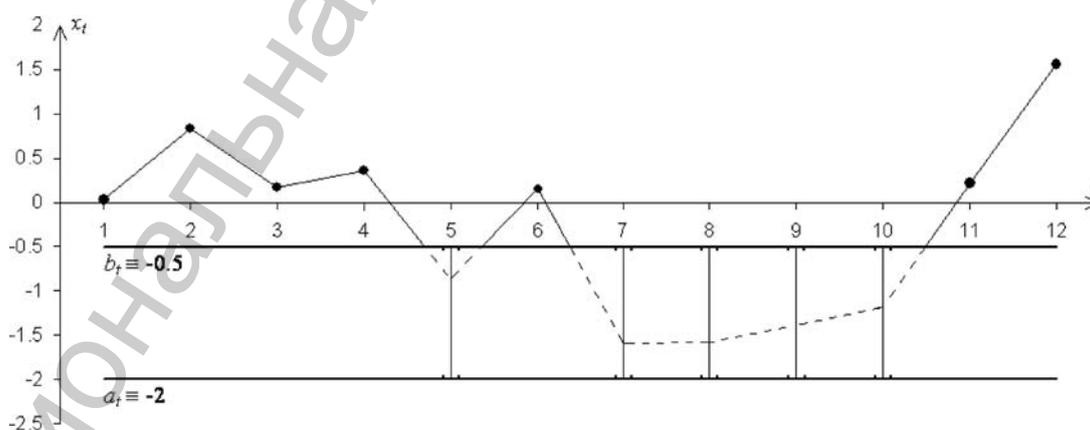
Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 12.01.2012)

Введение. Статистические данные на практике часто регистрируются с разного рода искажениями гипотетической модели наблюдений, при наличии которых классические оценки модельных параметров часто либо не могут быть вычислены, либо являются смещенными и несостоятельными [1–7]. Примерами таких искажений являются выбросы [1, 2], пропуски [3, 4], гетероскедастичность [3], цензурирование [5–7] и др. В связи с этим возникает необходимость разработки новых оценок, устойчивых к конкретным видам искажений.

В статье исследуются временные ряды при наличии цензурирования, которое заключается в том, что часть значений временного ряда не наблюдается точно: о них известно лишь, что эти значения принадлежат некоторым заданным числовым множествам [5]. Пример такого временного ряда представлен на рисунке. Цензурирование встречается в медицине, технике, метеорологии, финансах и других областях и может возникать из-за наличия у приборов конечных пределов измерений, высокой стоимости проведения точных измерений, специфики хранения данных и других причин [5–7].

В данной статье предлагается способ вычисления функции правдоподобия для гауссовского временного ряда (математическое ожидание и ковариационная функция которого зависят от некоторого параметра $\theta \in \mathbf{R}^m$) при наличии интервального цензурирования. Функция правдоподобия является важнейшим элементом оптимальных статистических процедур оценивания параметров и проверки гипотез. Предложенный способ иллюстрируется на примере регрессионной модели, в которой случайные ошибки наблюдений образуют гауссовский авторегрессионный временной ряд. В работе [7] отмечается, что данная задача является трудной и приводится спо-



Пример цензурированного временного ряда: все наблюдения, попавшие в интервал $[-2, -0.5)$, цензурированы, т. е. их истинные значения не известны

соб вычисления функции правдоподобия только лишь для случая одного или двух цензурированных значений.

1. Цензурированный гауссовский временной ряд. Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, \mathbf{P}) определен некоторый гауссовский временной ряд $x_t \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{Z}; X = (x_1, \dots, x_T)' \in \mathbf{R}^T$ – вектор-столбец T последовательных отсчетов временного ряда; $T \in \mathbf{N}$ – длительность наблюдаемого процесса. В некоторые моменты времени $1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_M \leq T$ исходный временной ряд подвержен цензурированию (censoring), т. е. вместо истинных значений наблюдаются лишь случайные события:

$$A_t = \{x_t \in [a(t), b(t)]\} \in F, t \in T_C, \quad (1)$$

где $a(t), b(t) \in \mathbf{R}$ ($-\infty < a(t) < b(t) < +\infty$) – известные неслучайные конечные границы интервала цензурирования, $T_C = \{t_1, \dots, t_M\}$ – множество моментов цензурирования, $M \in [0, T]$ – количество цензурированных наблюдений. Так, на рисунке в моменты времени $T_C = \{5, 7, 8, 9, 10\}$ временной ряд подвержен цензурированию и наблюдаются события $A_t = \{x_t \in [-2, -0.5]\}, t \in T_C$.

В силу гауссовости временного ряда x_t случайный вектор X имеет некоторое T -мерное гауссовское распределение вероятностей [8]:

$$L\{X\} = N_T(\mu, \Sigma), \quad (2)$$

где $\mu \in \mathbf{R}^T$ – некоторый вектор математического ожидания, $\Sigma \in \mathbf{R}^{T \times T}$ – некоторая положительно определенная ковариационная матрица. Будем предполагать, что вектор математического ожидания μ и ковариационная матрица Σ зависят от некоторого неизвестного m -мерного параметра $\theta \in \Theta \subseteq \mathbf{R}^m$ модели гауссовского временного ряда.

Обозначим: $X_C = (x_{t_1}, \dots, x_{t_M})' \in \mathbf{R}^M$ – вектор-столбец M цензурированных (censored) значений временного ряда, $X_O \in \mathbf{R}^{T-M}$ – вектор-столбец $T-M$ наблюдаемых (observed) значений временного ряда [5]; $E\{\cdot\}, \text{cov}\{\cdot\}$ – символы математического ожидания и ковариации соответственно:

$$\begin{aligned} \mu_O &= \mu_O(\theta) = E\{X_O\}, \mu_C = \mu_C(\theta) = E\{X_C\}, \Sigma_{OO} = \Sigma_{OO}(\theta) = \text{cov}\{X_O, X_O\}, \\ \Sigma_{CC} &= \Sigma_{CC}(\theta) = \text{cov}\{X_C, X_C\}, \Sigma_{OC} = \Sigma_{OC}(\theta) = \Sigma'_{CO} = \Sigma'_{CO}(\theta) = \text{cov}\{X_O, X_C\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что векторы X_C и X_O являются линейными преобразованиями исходного вектора наблюдений X . Действительно, $X_C = P_C X$, где $P_C \in \mathbf{R}^{M \times T}$ – $(M \times T)$ -матрица, у которой в i -й строке ровно одна единица, стоящая в t_i -м столбце, а остальные элементы – нули, $i = 1, \dots, M$. Аналогично, $X_O = P_O X$, где $P_O \in \mathbf{R}^{(T-M) \times T}$. Тогда (3) вычисляются следующим образом [9]:

$$\mu_O = P_O \mu, \mu_C = P_C \mu, \Sigma_{OO} = P_O \Sigma P_O', \Sigma_{CC} = P_C \Sigma P_C', \Sigma_{OC} = P_O \Sigma P_C'.$$

Согласно [9], случайный вектор X_C при фиксированном векторе X_O имеет условный нормальный закон распределения вероятностей $N_M(\bar{\mu}_{C|O}, \bar{\Sigma}_{CC|O})$ с параметрами:

$$\bar{\mu}_{C|O} = \mu_C + \Sigma_{CO} \Sigma_{OO}^{-1} (X_O - \mu_O), \bar{\Sigma}_{CC|O} = \Sigma_{CC} - \Sigma_{CO} \Sigma_{OO}^{-1} \Sigma_{OC}. \quad (4)$$

Задача заключается в построении функции правдоподобия $L(\theta)$ для гауссовского временного ряда при наличии интервального цензурирования (1).

2. Вспомогательные свойства многомерного гауссовского распределения вероятностей.

Примем обозначения: $\Phi(\cdot), \phi(\cdot)$ – соответственно функция и плотность распределения вероятностей стандартного нормального закона $N_1(0,1)$; $n_N(X|\mu, \Sigma)$ – плотность распределения вероятностей N -мерного нормального закона с заданными параметрами $\mu \in \mathbf{R}^N$ и $\Sigma \in \mathbf{R}^{N \times N}$; $P_C = [a_{t_1}, b_{t_1}] \times \dots \times [a_{t_M}, b_{t_M}]$ – ограниченный невырожденный M -мерный параллелепипед цен-

зурирования; $\delta(i, j) = \{1, i = j; 0, i \neq j\}$ – символ Кронекера; $I_A(x) = \{1, x \in A; 0, x \notin A\}$ – индикаторная функция множества A ;

$$v_l(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k) = \sum_{m=1}^k (\delta(i_m, l) + \delta(j_m, l)), k, l, i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k \in \mathbf{N} -$$

частота встречаемости индекса l среди индексов $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k$;

$$I_a^b(v, m, s^2) = \int_a^b (t - m)^v n_1(t | m, s^2) dt, a, b, m, s \in \mathbf{R}, v \in \mathbf{N} \cup \{0\} -$$

усеченный центральный момент порядка v нормального закона распределения вероятностей $N_1(m, s^2)$. Такие моменты могут быть вычислены через функции $\Phi(\cdot), \phi(\cdot)$ [10].

Лемма 1. Пусть случайный N -вектор X имеет невырожденный N -мерный нормальный закон распределения вероятностей $L\{X\} = N_N(\mu, \Sigma)$; $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_N)$ – некоторая невырожденная диагональная матрица; $A = (A_{ij})_{i,j=1}^N = \Sigma^{-1} - D$; $\Pi = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N]$ – некоторый ограниченный невырожденный N -мерный параллелепипед. Тогда верно следующее представление в виде ряда:

$$\mathbf{P}\{X \in \Pi\} = \int_{\Pi} n_N(X | \mu, \Sigma) dX = |\Sigma D|^{-1/2} \left(\prod_{l=1}^N I_{a_l}^{b_l}(0, \mu_l, d_l^{-1}) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! 2^k} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k=1}}^N A_{i_1 j_1} \dots A_{i_k j_k} \prod_{l=1}^N I_{a_l}^{b_l}(v_l(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k), \mu_l, d_l^{-1}) \right). \quad (5)$$

Доказательство. По определению плотности распределения вероятностей нормального закона имеем [9]:

$$\mathbf{P}\{X \in \Pi\} = \int_{\Pi} (2\pi)^{-N/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(X - \mu)' \Sigma^{-1}(X - \mu)\right) dX.$$

Для невырожденной матрицы D имеем: $\Sigma = \Sigma D D^{-1}$, $\Sigma^{-1} = \Sigma^{-1} + D - D$, следовательно, по свойству определителя матрицы [11] $|\Sigma|^{-1/2} = |\Sigma D|^{-1/2} |D^{-1}|^{-1/2}$, откуда получаем:

$$\mathbf{P}\{X \in \Pi\} = \int_{\Pi} (2\pi)^{-N/2} |\Sigma D|^{-1/2} |D^{-1}|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(X - \mu)' (\Sigma^{-1} + D - D)(X - \mu)\right) dX = \int_{\Pi} n_N(X | \mu, D^{-1}) |\Sigma D|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(X - \mu)' (\Sigma^{-1} - D)(X - \mu)\right) dX.$$

Квадратичная форма $Z(X) = -\frac{1}{2}(X - \mu)' (\Sigma^{-1} - D)(X - \mu)$ является многочленом от X и, следовательно, непрерывна по X и ограничена на Π [12], т. е. существуют такие константы $Z_-, Z_+ \in \mathbf{R}$, что $Z(X) \in [Z_-, Z_+], \forall X \in \Pi$. Следовательно, функция $\exp(Z(X))$ допускает разложение в виде равномерно сходящегося ряда Тейлора [13]:

$$\exp(Z(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(Z(X))^k}{k!}, Z(X) \in [Z_-, Z_+].$$

Поскольку при фиксированных значениях μ и D функция $n_N(X | \mu, D^{-1})$ ограничена на \mathbf{R}^N , то, согласно признаку Абеля [13], следующий ряд тоже сходится равномерно на Π :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(Z(X))^k n_N(X|\mu, D^{-1})}{k!} = \exp(Z(X)) n_N(X|\mu, D^{-1}). \quad (6)$$

Так как каждое слагаемое ряда (6) непрерывно на Π и ряд сходится равномерно, то данный ряд допускает почленное интегрирование [13]:

$$\mathbf{P}\{X \in \Pi\} = |\Sigma D|^{-1/2} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\Pi} n_N(X|\mu, D^{-1}) \frac{(-1)^k}{k! 2^k} \left(\sum_{i,j=1}^N (X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j) A_{ij} \right)^k dX.$$

При $k \geq 1$ имеем:

$$\left(\sum_{i,j=1}^N (X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j) A_{ij} \right)^k = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k=1}}^N A_{i_1 j_1} \dots A_{i_k j_k} \prod_{l=1}^N (X_l - \mu_l)^{\nu_l(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k)},$$

откуда получаем:

$$\mathbf{P}\{X \in \Pi\} = |\Sigma D|^{-1/2} \left(\int_{\Pi} n_N(X|\mu, D^{-1}) dX + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! 2^k} \int_{\Pi} n_N(X|\mu, D^{-1}) \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k=1}}^N A_{i_1 j_1} \dots A_{i_k j_k} \prod_{l=1}^N (X_l - \mu_l)^{\nu_l(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k)} dX \right).$$

Воспользуемся соотношением $n_N(X|\mu, D^{-1}) = \prod_{l=1}^N n_1(X_l|\mu_l, d_l^{-1})$, которое верно в силу диагональности матрицы D^{-1} , и получим требуемый результат (5).

Для остаточного члена этого ряда справедливо представление в форме Лагранжа:

$$R_n = \int_{\Pi} |\Sigma D|^{-1/2} e^{Z(X)} n_N(X|\mu, D^{-1}) dX - \sum_{k=0}^n \int_{\Pi} |\Sigma D|^{-1/2} \frac{(Z(X))^k n_N(X|\mu, D^{-1})}{k!} dX =$$

$$|\Sigma D|^{-1/2} \int_{\Pi} \frac{(Z(X))^{n+1}}{(n+1)!} e^{\alpha Z(X)} n_N(X|\mu, D^{-1}) dX, \quad \alpha \in (0,1)$$

Оценим остаточный член, пользуясь тем, что $Z(X) \in [Z_-, Z_+], \forall X \in \Pi$ ($Z_* = \max\{|Z_-|, |Z_+|\}$):

$$|R_n| \leq |\Sigma D|^{-1/2} \left| \int_{\Pi} \frac{(Z(X))^{n+1}}{(n+1)!} e^{\alpha Z(X)} n_N(X|\mu, D^{-1}) dX \right| \leq \frac{e^{Z_+} |\Sigma D|^{-1/2}}{(n+1)!} \left| \int_{\Pi} (Z(X))^{n+1} n_N(X|\mu, D^{-1}) dX \right| \leq$$

$$\frac{e^{Z_+} Z_*^{n+1} |\Sigma D|^{-1/2}}{(n+1)!} \left| \int_{\Pi} n_N(X|\mu, D^{-1}) dX \right| = \frac{e^{Z_+} Z_*^{n+1} |\Sigma D|^{-1/2}}{(n+1)!} \prod_{i=1}^N \left(\Phi\left(\frac{b_i - \mu_i}{d_i^{-1/2}}\right) - \Phi\left(\frac{a_i - \mu_i}{d_i^{-1/2}}\right) \right), \quad (7)$$

откуда согласно [12] получаем $|R_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Следствие 1. Пусть составной случайный N -вектор $X = (X'_{(1)}, X'_{(2)})'$ имеет невырожденный N -мерный нормальный закон распределения вероятностей $L\{X\} = N_N(\mu, \Sigma)$, где $X_{(1)} = (X_1, \dots, X_{N_1})' \in \mathbf{R}^{N_1}$, $1 \leq N_1 \leq N$, $X_{(2)} = (X_{N_1+1}, \dots, X_N)' \in \mathbf{R}^{N-N_1}$, $\mu_{(i)} = E\{X_{(i)}\}$, $\Sigma_{(ij)} = \text{cov}\{X_{(i)}, X_{(j)}\}$, $i, j \in \{1, 2\}$; $\bar{D} = \text{diag}(\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_{N_1})$ – некоторая невырожденная диагональ-

ная матрица порядка N_1 ; $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_l)_{l=1}^{N_1} = \mu_{(1)} + \Sigma_{(12)}\Sigma_{(22)}^{-1}(X_{(2)} - \mu_{(2)})$, $\bar{\Sigma} = \Sigma_{(11)} - \Sigma_{(12)}\Sigma_{(22)}^{-1}\Sigma_{(21)}$ – условные математическое ожидание и ковариационная матрица случайного подвектора $X_{(1)}$ при фиксированном подвекторе $X_{(2)}$; $\bar{A} = (\bar{A}_{ij})_{i,j=1}^{N_1} = \bar{\Sigma}^{-1} - \bar{D}$; $\Pi = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{N_1}, b_{N_1}]$ – некоторый ограниченный невырожденный N_1 -мерный параллелепипед. Тогда верно следующее представление в виде ряда:

$$\int_{\Pi} n_N(X_{(1)}, X_{(2)} | \mu, \Sigma) dX_{(1)} = n_{N-N_1}(X_{(2)} | \mu_{(2)}, \Sigma_{(22)}) |\bar{\Sigma}\bar{D}|^{-1/2} \left(\prod_{l=1}^{N_1} I_{a_l}^{b_l}(0, \bar{\mu}_l, \bar{d}_l^{-1}) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! 2^k} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k=1}}^{N_1} \bar{A}_{i_1 j_1} \dots \bar{A}_{i_k j_k} \prod_{l=1}^{N_1} I_{a_l}^{b_l}(v_l(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k), \bar{\mu}_l, \bar{d}_l^{-1}) \right). \quad (8)$$

Доказательство. Согласно [9], имеем:

$$\int_{\Pi} n_N(X_{(1)}, X_{(2)} | \mu, \Sigma) dX_{(1)} = n_{N-N_1}(X_{(2)} | \mu_{(2)}, \Sigma_{(22)}) \int_{\Pi} n_{N_1}(X_{(1)} | \bar{\mu}, \bar{\Sigma}) dX_{(1)}.$$

Воспользовавшись леммой 1 для интеграла в правой части, получим требуемое соотношение (8).

Приведем результат, позволяющий упростить вычисление матрицы $\bar{\Sigma}^{-1}$, обратной к условной ковариационной матрице $\bar{\Sigma}$ в условиях следствия 1.

Лемма 2. Для условной ковариационной матрицы $\bar{\Sigma}$ в условиях следствия 1 справедливы равенства:

$$\left((\bar{\Sigma})^{-1} \right)_{ij} = (\Sigma^{-1})_{ij}, \quad 1 \leq i \leq N_1, 1 \leq j \leq N_1. \quad (9)$$

Доказательство. Плотность распределения вероятностей случайного гауссовского вектора X имеет вид:

$$p(X) = (2\pi)^{-N/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(X - \mu)' \Sigma^{-1}(X - \mu)\right). \quad (10)$$

С другой стороны, по определению условной плотности распределения вероятностей имеем:

$$p(X) = p(X_{(2)})p(X_{(1)} | X_{(2)}) = p(X_{(2)}) (2\pi)^{-(N-N_1)/2} |\bar{\Sigma}|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(X_{(1)} - \bar{\mu})' \bar{\Sigma}^{-1}(X_{(1)} - \bar{\mu})\right). \quad (11)$$

В силу равенства (10) и (11), приравнявая коэффициенты при $X_i X_j$ ($1 \leq i, j \leq N_1$) в квадратичных формах в обеих частях равенства (в силу произвола $X \in \mathbf{R}^T$), получим (9).

З а м е ч а н и е 1. Для модели (1) – (3) условия леммы 2 означают, что матрицу $\bar{\Sigma}_{C|O}^{-1}$ можно получить из матрицы Σ^{-1} путем «вычеркивания» строк и столбцов, соответствующих наблюдаемым значениям временного ряда: $\left(\bar{\Sigma}_{C|O}^{-1} \right)_{ij} = \left(\Sigma^{-1} \right)_{i_t j_t}, \quad 1 \leq i, j \leq M$.

3. Представление функции правдоподобия цензурированного гауссовского временного ряда.

Теорема 1. Пусть для гауссовского временного ряда x_r заданного соотношениями (1) – (4), $1 \leq M < T$, $\bar{\mu} = \bar{\mu}_{C|O}$, $\bar{\Sigma} = \bar{\Sigma}_{C|O}$, $\left(\bar{\Sigma}^{-1} \right)_0 = \text{diag}\left(\left(\bar{\Sigma}^{-1} \right)_{11}, \dots, \left(\bar{\Sigma}^{-1} \right)_{MM} \right)$, $\bar{A} = \bar{\Sigma}^{-1} - \left(\bar{\Sigma}^{-1} \right)_0$. Тогда для функции правдоподобия справедливо следующее представление в виде ряда:

$$L(\theta) = \int_{\Pi_C} n_T(X|\theta) dX_C = n_{T-M}(X_O | \mu_O, \Sigma_{OO}) \left(\left| \bar{\Sigma} \right| \left(\bar{\Sigma}^{-1} \right)_0 \right)^{-1/2} \left(\prod_{l=1}^M I_{a(t_l)}^{b(t_l)} \left(0, \bar{\mu}_l, \left(\bar{\Sigma}^{-1} \right)_{ll}^{-1} \right) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{M-1} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k=2 \\ j_l > i_l}}^M \bar{A}_{i_1 j_1} \dots \bar{A}_{i_k j_k} \prod_{l=1}^M I_{a(t_l)}^{b(t_l)} \left(v_l(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k), \bar{\mu}_l, \left(\bar{\Sigma}^{-1} \right)_{ll}^{-1} \right) \right), \theta \in \Theta. \quad (12)$$

Доказательство. Соотношение (12) следует из следствия 1 при $N = T$, $N_1 = M$, $X_{(1)} = X_C$, $X_{(2)} = X_O$, $\bar{D} = \left(\bar{\Sigma}^{-1} \right)_0$ и того факта, что матрица \bar{A} является симметрической с нулевой диагональю.

Замечание 2. Для случая $M = T$, используя лемму 1, можно построить аналогичное (12) разложение.

Замечание 3. Выбор в качестве диагональной матрицы \bar{D} матрицы $\left(\bar{\Sigma}^{-1} \right)_0 = \text{diag} \left(\left(\bar{\Sigma}^{-1} \right)_{11}, \dots, \left(\bar{\Sigma}^{-1} \right)_{MM} \right)$ обусловлен тем, что в данном случае матрица $\bar{A} = \bar{\Sigma}^{-1} - \bar{D}$ имеет минимальное количество ненулевых элементов, что упрощает вычисление функции правдоподобия (12).

Теорема 1 позволяет на практике вычислять функцию правдоподобия в любой точке $\theta \in \Theta$ с любой заданной точностью. Пусть $L_K(\theta)$ – аппроксимация функции правдоподобия (12), полученная путем суммирования только $K + 1 < +\infty$ первых слагаемых этого ряда:

$$L_K(\theta) = n_{T-M}(X_O | \mu_O, \Sigma_{OO}) \left(\left| \bar{\Sigma} \right| \left(\bar{\Sigma}^{-1} \right)_0 \right)^{-1/2} \left(\prod_{l=1}^M I_{a(t_l)}^{b(t_l)} \left(0, \bar{\mu}_l, \left(\bar{\Sigma}^{-1} \right)_{ll}^{-1} \right) + \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{M-1} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k=2 \\ j_l > i_l}}^M \bar{A}_{i_1 j_1} \dots \bar{A}_{i_k j_k} \prod_{l=1}^M I_{a(t_l)}^{b(t_l)} \left(v_l(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k), \bar{\mu}_l, \left(\bar{\Sigma}^{-1} \right)_{ll}^{-1} \right) \right), \theta \in \Theta. \quad (13)$$

При $K = 0$ имеем следующую аппроксимацию:

$$L_0(\theta) = n_{T-M}(X_O | \mu_O, \Sigma_{OO}) \left(\left| \bar{\Sigma} \right| \left(\bar{\Sigma}^{-1} \right)_0 \right)^{-1/2} \prod_{l=1}^M \left(\Phi \left(\frac{b(t_l) - \bar{\mu}_l}{\left(\bar{\Sigma}^{-1} \right)_{ll}^{-1/2}} \right) - \Phi \left(\frac{a(t_l) - \bar{\mu}_l}{\left(\bar{\Sigma}^{-1} \right)_{ll}^{-1/2}} \right) \right).$$

Данная аппроксимация совпадает с истинной функцией правдоподобия в случае, когда наблюдения $\{x_i\}$ независимы, так как в этом случае матрица $\bar{\Sigma}$ является диагональной и, следовательно,

$\left(\bar{\Sigma}^{-1} \right)_{ll}^{-1} = \bar{\Sigma}_{ll}$, $\bar{\Sigma}^{-1} = E$, где E – единичная матрица.

При $K = 1$ имеем:

$$L_1(\theta) = n_{T-M}(X_O | \mu_O, \Sigma_{OO}) \left(\left| \bar{\Sigma} \right| \left(\bar{\Sigma}^{-1} \right)_0 \right)^{-1/2} \left(\prod_{l=1}^M I_{a(t_l)}^{b(t_l)} \left(0, \bar{\mu}_l, \left(\bar{\Sigma}^{-1} \right)_{ll}^{-1} \right) - \sum_{i_1=1}^{M-1} \sum_{\substack{j_1=2 \\ j_1 > i_1}}^M \bar{A}_{i_1 j_1} \prod_{l=1}^M I_{a(t_l)}^{b(t_l)} \left(v_l(i_1, j_1), \bar{\mu}_l, \left(\bar{\Sigma}^{-1} \right)_{ll}^{-1} \right) \right).$$

Из (7) следует, что в (13) можно выбрать такое значение K , при котором ошибка аппроксимации не превосходит наперед заданную константу. Предложенный на основе теоремы 1 подход

к вычислению функции правдоподобия (13) может быть применен к произвольному цензурированному гауссовскому временному ряду. Для иллюстрации данного подхода рассмотрим частный случай гауссовского временного ряда – так называемую регрессионную модель с авторегрессионными остатками [7].

4. Функция правдоподобия для цензурированного гауссовского регрессионного временного ряда. Пусть временной ряд x_t задается регрессионной моделью:

$$x_t = f(t; \bar{\theta}) + u_t, t \in \mathbf{Z}, \quad (14)$$

где $f(\cdot)$ – известная функция (тренд), зависящая от времени t и неизвестного $(m-2)$ -мерного параметра $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_{m-2})' \in \bar{\Theta} \subseteq \mathbf{R}^{m-2}$; u_t – временной ряд авторегрессии первого порядка AR(1), определяемый стохастическим разностным уравнением [14]:

$$u_{t+1} = \theta_{m-1} u_t + \xi_{t+1}, t \in \mathbf{Z}, \quad (15)$$

ξ_t – независимые в совокупности одинаково распределенные случайные величины с гауссовским законом распределения $L\{\xi_t\} = N_1(0, \sigma^2)$; $\theta_{m-1} \in \mathbf{R}$ – неизвестное истинное значение коэффициента авторегрессии, $|\theta_{m-1}| < 1$; $\theta_m = \sigma^2 > 0$ – неизвестная дисперсия.

Согласно [7, 15], временной ряд (14), (15) является гауссовским временным рядом с составным m -мерным вектором параметров $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)' = (\bar{\theta}', \theta_{m-1}, \sigma^2)' \in \mathbf{R}^m$; при этом $\mu = E\{X\} = (f(1; \bar{\theta}), \dots, f(T; \bar{\theta}))'$, $\Sigma = \text{cov}\{X, X\} = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^T$, где $\sigma_{ij} = \theta_{m-1}^{|i-j|} \theta_m / (1 - \theta_{m-1}^2)$.

Согласно (1) наблюдаемые данные могут быть представлены как последовательность чередующихся наблюдаемых и цензурированных фрагментов. Примем обозначения: τ_i^* – продолжительность i -го фрагмента цензурированных данных ($1 \leq i \leq M^*$); M^* – число фрагментов цензурирования;

$$T_C = T_C^{(1)} \cup T_C^{(2)} \cup T_C^{(3)} -$$

разбиение множества T_C на три непересекающихся подмножества:

$$\begin{aligned} T_C^{(1)} &= \{t \in T_C : t+1 \in T_C\}, T_C^{(2)} = \{t \in T_C : t-1 \in T_C, t+1 \notin T_C\}, T_C^{(3)} = \{t \in T_C : t-1 \notin T_C, t+1 \notin T_C\}; \\ T_O &= \{1, \dots, T\} \setminus T_C; \bar{T}_O = T_O \cup \{0, T+1\}; \\ q(t) &= \max\{i \in \bar{T}_O : i < t\}, p(t) = \min\{i \in \bar{T}_O : i > t\}, t \in T_C - \end{aligned} \quad (16)$$

ближайшие к t моменты времени в предыстории и будущем, в которые x_t наблюдаются полностью (равенство $q(t) = 0$ означает, что в предыстории все наблюдения цензурированы; аналогично, $p(t) = T+1$ означает, что в будущем все значения цензурированы);

$$m(t) = \frac{\theta_{m-1}^{p(t)-t} - \theta_{m-1}^{p(t)+t-2q(t)}}{1 - \theta_{m-1}^{2(p(t)-q(t))}} (x_{p(t)} - f(p(t); \bar{\theta})) + \frac{\theta_{m-1}^{t-q(t)} - \theta_{m-1}^{2p(t)-t-q(t)}}{1 - \theta_{m-1}^{2(p(t)-q(t))}} (x_{q(t)} - f(q(t); \bar{\theta})); \quad (17)$$

$$\bar{\mu}_l = f(t_l; \bar{\theta}) + \begin{cases} m(t_l), & q(t_l) > 0, p(t_l) < T+1; \\ \theta_{m-1}^{p(t_l)-t_l} (x_{p(t_l)} - f(p(t_l); \bar{\theta})), & q(t_l) = 0, p(t_l) < T+1; \\ \theta_{m-1}^{t_l-q(t_l)} (x_{q(t_l)} - f(q(t_l); \bar{\theta})), & q(t_l) > 0, p(t_l) = T+1; \\ 0 & q(t_l) = 0, p(t_l) = T+1; \end{cases} \quad (l \in \{1, \dots, M\}); \quad (18)$$

$$d_l = \begin{cases} 1/\theta_m, & l = 1 \text{ или } l = T, \\ (1 + \theta_{m-1}^2)/\theta_m, & \text{иначе;} \end{cases} \quad (19)$$

$$s_1(\tau) = \frac{1}{\theta_m^\tau}, \quad s_2(\tau) = \frac{1 - \theta_{m-1}^{2\tau+2}}{\theta_m^\tau (1 - \theta_{m-1}^2)}, \quad s_3(\tau) = \frac{1 - \theta_{m-1}^2}{\theta_m^\tau}, \quad \tau \in \mathbf{N};$$

$$S = \begin{cases} s_1(\tau_1^*)^{I_{T_C}(1)} s_2(\tau_1^*)^{(1-I_{T_C}(1))} \left(\prod_{i=2}^{M^*-1} s_2(\tau_i^*) \right) s_1(\tau_{M^*}^*)^{I_{T_C}(T)} s_2(\tau_{M^*}^*)^{(1-I_{T_C}(T))}, & M^* > 1, \\ s_3(T)^{I_{T_C}(1)I_{T_C}(T)} s_1(\tau_1^*)^{(I_{T_C}(1)+I_{T_C}(T)-2I_{T_C}(1)I_{T_C}(T))} s_2(\tau_1^*)^{(1-I_{T_C}(1))(1-I_{T_C}(T))}, & M^* = 1; \end{cases} \quad (20)$$

$$v_l^*(i_1, \dots, i_k) = v_l(i_1, i_1 + 1, \dots, i_k, i_k + 1) = \sum_{m=1}^k (\delta(i_m, l) + \delta(i_m + 1, l)), \quad l, i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, M\}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

З а м е ч а н и е 4. Заметим, что максимум и минимум в (16) всегда существуют, поскольку множество \bar{T}_O конечно и ни 0, ни $T+1$ не принадлежат множеству T_C .

З а м е ч а н и е 5. Для $\forall t \in T_C : q(t) < t < p(t)$.

З а м е ч а н и е 6. Согласно замечанию 5 для всех $t \in T_C$ выражение $1 - \theta_{m-1}^{2(p(t)-q(t))} \neq 0$, следовательно, функция $m(t)$, определяемая (17), задана корректно.

Приведем вспомогательный результат для марковских временных рядов.

Л е м м а 3. Пусть x_t – марковский временной ряд, $X = (x_1, \dots, x_T)' \in \mathbf{R}^T$ – вектор-столбец T последовательных отсчетов этого временного ряда, тогда для любых $q, t, p \in \mathbf{N}$ таких, что $1 \leq q < t < p \leq T$, справедливо соотношение:

$$p(x_t | x_1, \dots, x_q, x_p, \dots, x_T) = p(x_t | x_q, x_p).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Требуемое равенство следует из определения условной плотности распределения вероятностей и свойства марковости временного ряда.

Т е о р е м а 2. Пусть временной ряд x_p описываемый соотношениями (14), (15), подвержен цензурированию (1), случайные векторы X_O, X_C заданы соотношениями (3), (4). Тогда функция правдоподобия представима в виде:

$$L(\theta) = n_{T-M} (X_O | \mu_O, \Sigma_{OO}) \sqrt{S} \theta_m^{M/2} (1 + \theta_{m-1}^2)^{(I_{T_C}(1) + I_{T_C}(T) - M)/2} \prod_{l=1}^M I_{a(t)}^{b(t)}(0, \bar{\mu}_l, \bar{d}_l^{-1}) \times \prod_{t \in T_C^{(3)}} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\theta_{m-1}^k}{\theta_m^k k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{M-1} \mathbf{I}_{T_C^{(1)}}(t_{i_1}) \dots \mathbf{I}_{T_C^{(1)}}(t_{i_k}) \prod_{l=1}^M I_{a(t)}^{b(t)}(v_l^*(i_1, \dots, i_k), \bar{\mu}_l, \bar{d}_l^{-1}) + \prod_{l=1}^M I_{a(t)}^{b(t)}(0, \bar{\mu}_l, \bar{d}_l^{-1}) \right) \prod_{t \in T_C^{(1)} \cup T_C^{(2)}} \quad (21)$$

где условное математическое ожидание $\bar{\mu}_l$ вычисляется по формулам (17), (18), \bar{d}_l задается (19), S – (20), μ_O, Σ_{OO} – (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся теоремой 1. Для этого вычислим входящие в (12) величины. Поскольку временной ряд x_t является марковским [8], то, согласно лемме 3, для любого момента времени $t \in T_C$ условное математическое ожидание x_t при фиксированных наблюдаемых значениях зависит только от ближайших наблюдаемых прошлого ($x_{q(t)}$) и будущего ($x_{p(t)}$). Таким образом, возможны 4 случая.

1) В предыстории и в будущем есть наблюдаемые значения ($0 < q(t) < t$, $t < p(t) < T + 1$), тогда, согласно лемме 3 и [9],

$$E\{x_t | X_o\} = E\{x_t | x_{q(t)}, x_{p(t)}\} = f(t; \bar{\theta}) + m(t). \quad (22)$$

2) В будущем есть полностью наблюдаемые значения, а в прошлом все значения были цензурированы ($q(t) = 0$, $t < p(t) < T + 1$), тогда, согласно [9],

$$E\{x_t | X_o\} = E\{x_t | x_{p(t)}\} = f(t; \bar{\theta}) + \theta_{m-1}^{p(t)-t} (x_{p(t)} - f(p(t); \bar{\theta})). \quad (23)$$

3) В прошлом есть полностью наблюдаемые значения, а в будущем все значения цензурированы ($0 < q(t) < t$, $p(t) = T + 1$), тогда, согласно [9],

$$E\{x_t | X_o\} = E\{x_t | x_{q(t)}\} = f(t; \bar{\theta}) + \theta_{m-1}^{t-q(t)} (x_{q(t)} - f(q(t); \bar{\theta})). \quad (24)$$

4) Все значения и в прошлом и в будущем цензурированы ($q(t) = 0$, $p(t) = T + 1$):

$$E\{x_t | X_o\} = E\{x_t\} = f(t; \bar{\theta}). \quad (25)$$

Объединяя результаты (22) – (25), получим, что $\bar{\mu}_t = E\{x_t | X_o\}$ вычисляется по формулам (17), (18).

Известно [15], что для AR(1) процесса u_t матрица, обратная к ковариационной матрице, имеет трехдиагональный вид:

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\theta_m} \begin{pmatrix} 1 & -\theta_{m-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \theta_{m-1} & 1 + \theta_{m-1}^2 & -\theta_{m-1} & \cdots & 0 \\ -0 & -\theta_{m-1} & 1 + \theta_{m-1}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Тогда согласно лемме 2 условная ковариационная матрица случайного вектора X_C при фиксированном векторе X_o имеет блочно-диагональный вид:

$$\bar{\Sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} V_1 & 0_{\tau_1^* \times \tau_2^*} & \cdots & 0_{\tau_1^* \times \tau_{M^*}^*} \\ 0_{\tau_2^* \times \tau_1^*} & V_2 & \cdots & 0_{\tau_2^* \times \tau_{M^*}^*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{\tau_{M^*}^* \times \tau_1^*} & 0_{\tau_{M^*}^* \times \tau_2^*} & \cdots & V_{M^*} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где $V_i \in \mathbf{R}^{\tau_i^* \times \tau_i^*}$, $i \in \{1, \dots, M^*\}$ – i -й блок, $0_{m \times n}$ – нулевая ($m \times n$)-матрица. Как и при анализе условного математического ожидания, для каждого блока возможны следующие четыре случая в зависимости от наличия наблюдаемых значений в предыстории и будущем.

1) У i -го фрагмента цензурированных данных ($i \in \{1, \dots, M^*\}$) имеются полностью наблюдаемые значения в предыстории и будущем, в этом случае блок имеет вид:

$$V_i = \frac{1}{\theta_m} \begin{pmatrix} 1 + \theta_{m-1}^2 & -\theta_{m-1} & \cdots & 0 \\ -\theta_{m-1} & 1 + \theta_{m-1}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 + \theta_{m-1}^2 \end{pmatrix}.$$

Согласно [11], определитель трехдиагональной матрицы $M_{n \times n} = \{m_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ удовлетворяет следующей рекуррентному соотношению:

$$\det M_{n \times n} = m_{n,n} \det M_{(n-1) \times (n-1)} - m_{n-1,n} m_{n,n-1} \det M_{(n-2) \times (n-2)}, \quad n > 2. \quad (28)$$

Используя (28), можно показать по индукции, что

$$\det V_i = s_2(\tau_i^*) = \frac{1 - \theta_{m-1}^{2\tau_i^* + 2}}{(1 - \theta_{m-1}^2) \theta_m^{\tau_i^*}}. \quad (29)$$

2) Перед первым фрагментом цензурированных данных нет наблюдаемых значений, т. е. временной ряд начинает наблюдаться с цензурированных значений ($I_{T_c}(1) = 1$), но за этим фрагментом есть наблюдаемые значения, тогда блок имеет вид

$$V_1 = \frac{1}{\theta_m} \begin{pmatrix} 1 & -\theta_{m-1} & \cdots & 0 \\ -\theta_{m-1} & 1 + \theta_{m-1}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 + \theta_{m-1}^2 \end{pmatrix}, \quad \det V_1 = s_1(\tau_1^*) = \frac{1}{\theta_m^{\tau_1^*}}, \quad (30)$$

а соотношение для определителя доказывается по индукции с использованием (28).

3) За последним фрагментом цензурированных данных нет наблюдаемых значений, т. е. наблюдаемый временной ряд заканчивается цензурированными значениями ($I_{T_c}(T) = 1$), но перед этим фрагментом есть наблюдаемые значения, тогда аналогично случаю 2 получаем:

$$V_{M^*} = \frac{1}{\theta_m} \begin{pmatrix} 1 + \theta_{m-1}^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 + \theta_{m-1}^2 & -\theta_{m-1} \\ 0 & \cdots & -\theta_{m-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad \det V_{M^*} = s_1(\tau_{M^*}^*) = \frac{1}{\theta_m^{\tau_{M^*}^*}}. \quad (31)$$

4) Цензурированы все значения временного ряда, в этом случае $\bar{\Sigma}^{-1} = \Sigma^{-1}$ и

$$\det \Sigma^{-1} = s_3(T) = \frac{1 - \theta_{m-1}^2}{\theta_m^T}. \quad (32)$$

Учитывая, что матрица (27) является блочно-диагональной, имеем [11]: $\det \bar{\Sigma}^{-1} = \prod_{i=1}^{M^*} \det V_i$, откуда, учитывая (29) – (32), получаем $\det \bar{\Sigma}^{-1} = S$, где S задается соотношением (20).

Рассмотрим диагональную матрицу $(\bar{\Sigma}^{-1})_0 = \text{diag}((\bar{\Sigma}^{-1})_{11}, \dots, (\bar{\Sigma}^{-1})_{MM})$. Из (26) следует, что у нее все диагональные элементы, кроме первого и последнего, всегда равны $(1 + \theta_{m-1}^2) / \theta_m$. Первый и последний элементы равны либо $(1 + \theta_{m-1}^2) / \theta_m$, либо $1 / \theta_m$ в зависимости от того, являются ли первое и последнее наблюдения цензурированными или нет. Таким образом, $(\bar{\Sigma}^{-1})_0 = \text{diag}(d_1, \dots, d_{t_M})$, где d_j задается соотношением (19), откуда

$$\det(\bar{\Sigma}^{-1})_0 = (1 + \theta_{m-1}^2)^{M - I_{T_c}(1) - I_{T_c}(1)} \theta_m^{-M}.$$

Рассмотрим симметрическую матрицу с нулевой диагональю $\bar{A} = \bar{\Sigma}^{-1} - (\bar{\Sigma}^{-1})_0$. Из (27) имеем, что для $1 \leq i < j \leq M$

$$\bar{A}_{i,j} = \begin{cases} -\theta_{m-1} / \theta_m, & t_i \in T_C^{(1)}, j = i + 1; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Отсюда заключаем, что произведения $\bar{A}_{i_1 j_1} \dots \bar{A}_{i_k j_k}$, входящие в (12), принимают единственное ненулевое значение $(-1)^k \theta_{m-1}^k / \theta_m^k$ при $t_{i_1} \in T_C^{(1)}, \dots, t_{i_k} \in T_C^{(1)}, j_1 = i_1 + 1, \dots, j_k = i_k + 1$:

$$S = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{M-1} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k=2 \\ j_l > i_l}}^M \bar{A}_{i_1 j_1} \dots \bar{A}_{i_k j_k} \prod_{l=1}^M I_{a(t_l)}^{b(t_l)} \left(v_l(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k), \bar{\mu}_l, (\bar{\Sigma}^{-1})_l^{-1} \right) =$$

$$(-1)^k \theta_{m-1}^k / \theta_m^k \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{M-1} I_{T_C^{(1)}}(t_{i_1}) \dots I_{T_C^{(1)}}(t_{i_k}) \prod_{l=1}^M I_{a(t_l)}^{b(t_l)} \left(v_l(i_1, \dots, i_k, i_1 + 1, \dots, i_k + 1), \bar{\mu}_l, (\bar{\Sigma}^{-1})_l^{-1} \right). \quad (33)$$

Рассмотрим момент времени $t_l \in T_C^{(3)}$, тогда по определению множества $T_C^{(3)}$: $v_l(i_1, \dots, i_k, i_1 + 1, \dots, i_k + 1) = v_l^*(i_1, \dots, i_k) = 0$ для $\forall i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, M\}$ таких, что $t_{i_1}, \dots, t_{i_k} \in T_C^{(1)}$. Учитывая данный факт в (33), имеем:

$$S = (-1)^k \theta_{m-1}^k / \theta_m^k \prod_{l=1}^M I_{T_C^{(3)}}(t_l) I_{a(t_l)}^{b(t_l)} (0, \bar{\mu}_l, \bar{d}_l^{-1}) \times$$

$$\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{M-1} I_{T_C^{(1)}}(t_{i_1}) \dots I_{T_C^{(1)}}(t_{i_k}) \prod_{l=1}^M I_{T_C^{(1)} \cup T_C^{(2)}}(t_l) I_{a(t_l)}^{b(t_l)} (v_l^*(i_1, \dots, i_k), \bar{\mu}_l, \bar{d}_l^{-1}).$$

Объединяя все полученные результаты, получим требуемое соотношение (21).

Приведем примеры аппроксимаций функции правдоподобия, полученных из теоремы 2, путем суммирования в (21) только $K + 1$ первых слагаемых, являющиеся частными случаями (13). При $K = 0$ и $K = 1$ имеем соответственно:

$$L_0(\theta) = n_{T-M} (X_O | \mu_O, \Sigma_{OO}) \sqrt{S} \theta_m^{M/2} (1 + \theta_{m-1}^2)^{(I_{T_C^{(1)}} + I_{T_C^{(T-M)}})/2} \prod_{l=1}^M \left(\Phi \left(\frac{b(t_l) - \bar{\mu}_l}{\bar{d}_l^{-1/2}} \right) - \Phi \left(\frac{a(t_l) - \bar{\mu}_l}{\bar{d}_l^{-1/2}} \right) \right),$$

$$L_1(\theta) = n_{T-M} (X_O | \mu_O, \Sigma_{OO}) \sqrt{S} \theta_m^{M/2} (1 + \theta_{m-1}^2)^{(I_{T_C^{(1)}} + I_{T_C^{(T-M)}})/2} \prod_{l=1}^M I_{a(t_l)}^{b(t_l)} (0, \bar{\mu}_l, \bar{d}_l^{-1}) \times$$

$$\left(\frac{\theta_{m-1}}{\theta_m} \sum_{i_1=1}^{M-1} I_{T_C^{(1)}}(t_{i_1}) \prod_{l=1}^M I_{a(t_l)}^{b(t_l)} (v_l^*(i_1), \bar{\mu}_l, \bar{d}_l^{-1}) + \prod_{l=1}^M I_{a(t_l)}^{b(t_l)} (0, \bar{\mu}_l, \bar{d}_l^{-1}) \right).$$

Литература

1. Хьюбер П. Робастность в статистике. М., 1984.
2. Хампель Ф., Рончетти Э., Рауссеу П., Штаэль В. Робастность в статистике. Подход на основе функции влияния. М., 1989.
3. Харин Ю. С. Оптимальность и робастность в статистическом прогнозировании. Минск, 2008.
4. Литтл Р. Дж. А., Рубин Д. Б. Статистический анализ данных с пропусками. М., 1990.
5. Park J. W., Genton M. G., Ghosh S. K. // The Canadian Journal of Statistics. 2007. Vol. 35, N 1. P. 151–168.
6. Gomez G., Espinal A., Lagakos W. // Statistics in medicine. 2003. N 22. P. 409–425.
7. Zeger S., Brookmeyer R. // Journal of the American Statistical Association. 1986. N 81. P. 722–729.
8. Ширяев А. Н. Вероятность. М., 1980.
9. Андерсон Т. В. Введение в многомерный статистический анализ данных. М., 1963.
10. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963.
11. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М., 1989.
12. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления Т. I. М., 2003.
13. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления Т. II. М., 2003.
14. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. М., 1974.
15. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М., 1976.

I. A. BADZIAHIN, Yu. S. KHARIN

LIKELIHOOD FUNCTION FOR CENSORED GAUSSIAN TIME SERIES

Summary

The functional expansion of the likelihood function for the Gaussian time series observed under interval censoring is constructed in computable form. The expansion is illustrated for the regression model under assumption that random errors correspond to the autoregressive model.

УДК 517.53

Н. В. ГРИБ

**ПРИБЛИЖЕНИЕ СУММАТОРНЫМИ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ
 2 π -ПЕРИОДИЧЕСКИХ КУСОЧНО-ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ**

Белорусский государственный педагогический университет им. Максима Танка

(Поступила в редакцию 27.04.2011)

Интегральные рациональные операторы типа Джексона на прямой и окружности впервые были построены В. Н. Русаком [1]. Е. А. Ровба построил аналогичные операторы сумматорного типа для прямой [2, 3]. На окружности сумматорные рациональные операторы типа Джексона впервые были построены автором в [4]. В настоящей работе исследуется сходимость задаваемых ими последовательностей рациональных функций к непрерывным 2π -периодическим кусочно-выпуклым функциям.

По заданной последовательности комплексных чисел $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $0 \leq |\alpha_k| < 1$ определим произведение Бляшке

$$\pi_n(z) = \prod_{k=1}^n \frac{z - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k}z}.$$

Уравнение $\pi_n^2(z) - 1 = 0$ имеет $2n$ различных корней $z_j = e^{iu_j}$, $j = \overline{1, 2n}$, расположенных на окружности $|z| = 1$.

Введем следующие обозначения

$$\Phi_n(u) = \arg \pi_n(e^{iu}), \rho_n(z) = z \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{(1 - \overline{\alpha_k}z)(z - \alpha_k)},$$

$$\Psi_n(z) = \frac{2}{3} (2\rho_n^3(z) + \rho_n(z) - z\rho_n'(z) - z^2\rho_n''(z)), K_n(z, \xi) = \left(\frac{\pi_n(z)}{\pi_n(\xi)} + \frac{\pi_n(\xi)}{\pi_n(z)} - 2 \right) \frac{z\xi}{(z - \xi)^2}.$$

В пространстве $C(L)$ непрерывных на единичной окружности функций введем сумматорный рациональный оператор типа Джексона

$$D_{4n-2}(z, f) = \frac{1}{\Psi_n(z)} \sum_{j=1}^{2n} \frac{K_n^2(z, z_j)}{\rho_n(z_j)} f(z_j).$$

Данный оператор является точным на константах, а его значение $D_{4n-2}(z, f)$ – рациональная функция порядка не выше $4n - 2$. При $z = e^{iu}$, $z_j = e^{iu_j}$, $\varphi(u) = f(e^{iu})$, $\Psi_n(u) = \Psi_n(e^{iu})$ также справедливо другое представление оператора D_{4n-2} (см. [4])

$$D_{4n-2}(u, \varphi) = \frac{1}{\Psi_n(u)} \sum_{j=1}^{2n} \frac{\varphi(u_j)}{\Phi_n'(u_j)} \frac{\sin^4 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\sin^4 \frac{u - u_j}{2}}.$$

Лемма 1. Имеют место неравенства

$$\Psi_n(u) > (\Phi'_n(u))^3,$$

$$\Psi_n(u) > \frac{2}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{\left((1 - |\alpha_k|)^2 + 4|\alpha_k| \sin^2 \frac{u - \arg \alpha_k}{2} \right)^2}.$$

Доказательство. Будем в дальнейшем полагать, что $|z|=1$. Представим $\rho_n(z)$ в виде суммы простых дробей

$$\rho_n(z) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\alpha_k}{z - \alpha_k} + \frac{1}{1 - \alpha_k z} \right).$$

Преобразуем сумму двух последних слагаемых в представлении $\psi_n(z)$:

$$z\rho'_n(z) + z^2\rho''_n(z) = z \sum_{k=1}^n \left(-\frac{\alpha_k}{(z - \alpha_k)^2} + \frac{\bar{\alpha}_k}{(1 - \bar{\alpha}_k z)^2} + \frac{2\alpha_k z}{(z - \alpha_k)^3} + \frac{2\bar{\alpha}_k \bar{z}}{(1 - \bar{\alpha}_k z)^3} \right) =$$

$$2 \sum_{k=1}^n \frac{\operatorname{Re}(\alpha_k^2 \bar{z}^2) - |\alpha_k|^2 \operatorname{Re}(\alpha_k^2 \bar{z}^2) + \operatorname{Re}(\alpha_k \bar{z}) - |\alpha_k|^4 \operatorname{Re}(\alpha_k \bar{z}) - 3|\alpha_k|^2 + 3|\alpha_k|^4}{(1 - 2\operatorname{Re}(\alpha_k \bar{z}) + |\alpha_k|^2)^3} =$$

$$2 \sum_{k=1}^n \frac{(1 - |\alpha_k|^2) \left(\operatorname{Re}(\alpha_k^2 \bar{z}^2) + (1 + |\alpha_k|^2) \operatorname{Re}(\alpha_k \bar{z}) - 3|\alpha_k|^2 \right)}{(1 - 2\operatorname{Re}(\alpha_k \bar{z}) + |\alpha_k|^2)^3}.$$

Видно, что данная сумма принимает действительные значения при $|z|=1$, то же можно сказать и о $\rho_n(z)$, поэтому и функция $\psi_n(z)$ при $|z|=1$ принимает действительные значения. Представим $\psi_n(z)$ в виде

$$\psi(z) = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} \rho_n^3(z) + \frac{1}{2} \rho_n^3(z) + \rho_n(z) - z\rho'_n(z) - z^2\rho''_n(z) \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} \rho_n^3(z) + S_1 \right). \quad (1)$$

Оценим сумму S_1

$$S_1 > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(1 - |\alpha_k|^2)^3}{(1 - 2\operatorname{Re}(\alpha_k \bar{z}) + |\alpha_k|^2)^3} + \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - 2\operatorname{Re}(\alpha_k \bar{z}) + |\alpha_k|^2} -$$

$$2 \sum_{k=1}^n \frac{(1 - |\alpha_k|^2) \left(\operatorname{Re}(\alpha_k^2 \bar{z}^2) + (1 + |\alpha_k|^2) \operatorname{Re}(\alpha_k \bar{z}) - 3|\alpha_k|^2 \right)}{(1 - 2\operatorname{Re}(\alpha_k \bar{z}) + |\alpha_k|^2)^3} \geq$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{(1 - |\alpha_k|^2) \left(\frac{1}{2} (1 - |\alpha_k|)^2 (1 + |\alpha_k|)^2 + (1 - |\alpha_k|)^4 - 2(|\alpha_k|^2 + (1 + |\alpha_k|^2)|\alpha_k| - 3|\alpha_k|^2) \right)}{(1 + |\alpha_k|)^6} =$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{(1 - |\alpha_k|^2) (1 - |\alpha_k|)^2 \left(\frac{3}{2} |\alpha_k|^2 - 3|\alpha_k| + \frac{3}{2} \right)}{(1 + |\alpha_k|)^6} = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(1 - |\alpha_k|^2) (1 - |\alpha_k|)^4}{(1 + |\alpha_k|)^6} > 0.$$

Подставляя данное соотношение в (1), получим первое неравенство в утверждении леммы.

Оценивая $\psi_n(z)$ аналогично S_1 , можно получить соотношение

$$\psi_n(z) > \frac{2}{3} \sum_{k=1}^n \frac{\left(1 - |\alpha_k|^2\right) \left(2(1 - |\alpha_k|)^2 (1 + |\alpha_k|)^2 + \left(1 - 2\operatorname{Re}(\alpha_k \bar{z}) + |\alpha_k|^2\right)^2\right)}{\left(1 - 2\operatorname{Re}(\alpha_k \bar{z}) + |\alpha_k|^2\right)^3}$$

$$\frac{4}{3} \sum_{k=1}^n \frac{\left(1 - |\alpha_k|^2\right) \left(\operatorname{Re}\left(\alpha_k^2 \bar{z}^2\right) + (1 + |\alpha_k|^2) \operatorname{Re}(\alpha_k \bar{z}) - 3|\alpha_k|^2\right)}{\left(1 - 2\operatorname{Re}(\alpha_k \bar{z}) + |\alpha_k|^2\right)^3} = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^n \frac{\left(1 - |\alpha_k|^2\right) S_2}{\left(1 - 2\operatorname{Re}(\alpha_k \bar{z}) + |\alpha_k|^2\right)^3},$$

где

$$S_2 = 2\left(1 - |\alpha_k|^2\right)^2 + \left(1 - 2\operatorname{Re}(\alpha_k \bar{z}) + |\alpha_k|^2\right)^2 - 2\left(\operatorname{Re}\left(\alpha_k^2 \bar{z}^2\right) + (1 + |\alpha_k|^2) \operatorname{Re}(\alpha_k \bar{z}) - 3|\alpha_k|^2\right).$$

Для доказательства второго неравенства леммы достаточно при $z = e^{iu}$ установить справедливость соотношений

$$S_2 \geq 1 - 2\operatorname{Re}(\alpha_k \bar{z}) + |\alpha_k|^2 = (1 - |\alpha_k|)^2 + 4|\alpha_k| \sin^2 \frac{u - \arg \alpha_k}{2}.$$

Действительно, с одной стороны,

$$S_2 - \left(1 - 2\operatorname{Re}(\alpha_k \bar{z}) + |\alpha_k|^2\right) = 2\left(1 - |\alpha_k|^2\right)^2 + \left(1 - 2\operatorname{Re}(\alpha_k \bar{z}) + |\alpha_k|^2\right)^2 -$$

$$2\operatorname{Re}\left(\alpha_k^2 \bar{z}^2\right) - 2|\alpha_k|^2 \operatorname{Re}(\alpha_k \bar{z}) + 5|\alpha_k|^2 - 1 \geq$$

$$2\left(1 - |\alpha_k|^2\right)^2 + (1 - |\alpha_k|)^4 - 2|\alpha_k|^2 - 2|\alpha_k|^3 + 5|\alpha_k|^2 - 1 = (1 - |\alpha_k|)^2 (3|\alpha_k| + 2)^2 > 0,$$

с другой стороны,

$$1 - 2\operatorname{Re}(\alpha_k \bar{z}) + |\alpha_k|^2 = (1 - |\alpha_k|)^2 + 2|\alpha_k|(1 - \cos(u - \arg \alpha_k)) = (1 - |\alpha_k|)^2 + 4|\alpha_k| \sin^2 \frac{u - \arg \alpha_k}{2},$$

и тем самым доказательство леммы закончено.

Назовем функцию $\varphi(u) \in C_{2\pi}$ простой, если она абсолютно непрерывна, равна нулю на дополнении отрезка $[a, b]$, $b - a \leq 2\pi$, называемого опорным, к отрезку $\left[(a+b)/2 - \pi, (a+b)/2 + \pi\right]$, и $\|\varphi'\|_{L_\infty} \leq (b-a)^{-1}$.

Лемма 2. Если $f(u) = \varphi_1(u) + \varphi_2(u)$, где $\varphi_1(u)$ и $\varphi_2(u)$ – простые функции с опорными отрезками $[\theta_1 - d_1, \theta_1 + d_1]$ и $[\theta_2 - d_2, \theta_2 + d_2]$, $\theta_2 + d_2 - \theta_1 + d_1 \leq 2\pi$, $\theta_2 - d_2 \geq \theta_1 + d_1$, то при подходящем выборе параметров $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ справедлива оценка

$$|f(u) - D_{4n-2}(u, f)| \leq \sum_{l=1}^2 \left(\frac{\frac{9}{\sqrt[3]{\Psi_n(u)}} \left(1 - \left(1 - \frac{d_l}{\pi}\right)^2\right)}{\frac{d_l^2}{\pi^2} + 4\left(1 - \frac{d_l}{\pi}\right) \sin^2 \frac{u - \theta_l}{2}} + \frac{\frac{300}{\Psi_n(u)} \left(1 - \left(1 - \frac{d_l}{\pi}\right)^2\right)}{\left(\frac{d_l^2}{\pi^2} + 4\left(1 - \frac{d_l}{\pi}\right) \sin^2 \frac{u - \theta_l}{2}\right)^2} \right).$$

Доказательство. Выберем параметры $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ следующим образом:

1) $\alpha_1 = (1 - d_1/\pi)e^{i\theta_1}$, $\alpha_2 = (1 - d_2/\pi)e^{i\theta_2}$;

2) остальные параметры лежат на лучах $\arg z = \theta_1$, $\arg z = \theta_2$ и $0 \leq |\alpha_k| < 1$, $k = \overline{3, n}$.

Пусть

$$E_u = \left\{ j \mid j = \overline{1..2n}, |u - u_j| < \frac{1}{\sqrt[3]{\Psi_n(u)}} \right\}, \quad CE_u = \{1, 2, \dots, 2n\} \setminus E_u.$$

Если $u \in [\theta_1 - 10d_1, \theta_1 + 10d_1] \cup [\theta_2 - 10d_2, \theta_2 + 10d_2]$, то с учетом определения простой функции, свойств оператора D_{4n-2} и неравенства Коши–Буняковского для $l = 1, 2$ будем иметь

$$\begin{aligned} |\varphi(u) - D_{4n-2}(u, f)| &\leq \frac{1}{\Psi_n(u)} \sum_{E_u} \frac{1}{2d_l \sqrt[3]{\Psi_n(u)}} \frac{\sin^4 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\Phi'_n(u_j) \sin^4 \frac{u - u_j}{2}} + \\ &\frac{1}{\Psi_n(u)} \sum_{CE_u} \frac{\pi}{2d_l} \frac{\left| \sin^3 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j)) \right|}{\Phi'_n(u_j) \sin^3 \frac{|u - u_j|}{2}} \leq \frac{1}{2d_l \sqrt[3]{\Psi_n(u)}} + \\ &\frac{\pi \sqrt{\Phi'_n(u)}}{2d_l \sqrt{\Psi_n(u)}} \sqrt{\sum_{j=1}^{2n} \frac{\sin^4 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\Psi_n(u) \Phi'_n(u_j) \sin^4 \frac{u - u_j}{2}}} \sqrt{\sum_{j=1}^{2n} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\Phi'_n(u) \Phi'_n(u_j) \sin^2 \frac{u - u_j}{2}}} = \\ &\frac{1}{2d_l \sqrt[3]{\Psi_n(u)}} + \frac{\pi \sqrt{2}}{2d_l \sqrt[3]{\Psi_n(u)}} = \frac{\pi \sqrt{2} + 1}{2d_l \sqrt[3]{\Psi_n(u)}}. \end{aligned} \quad (2)$$

С учетом оценки

$$\frac{1}{d_l} = \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{d_l^2} \leq \frac{1}{\pi^3} \left(100 + \frac{1}{\pi^2} \right) \frac{\frac{2d_l}{\pi} - \frac{d_l^2}{\pi^2}}{d_l^2 + 100d_l^2} \leq \frac{1}{\pi^3} \left(100 + \frac{1}{\pi^2} \right) \frac{1 - \left(1 - \frac{d_l}{\pi} \right)^2}{d_l^2 + 4 \left(1 - \frac{d_l}{\pi} \right) \sin^2 \frac{u - \theta_l}{2}}$$

неравенство (2) при $u \in [\theta_1 - 10d_1, \theta_1 + 10d_1] \cup [\theta_2 - 10d_2, \theta_2 + 10d_2]$ можно переписать в виде

$$|f(u) - D_{4n-2}(u, f)| < \frac{9}{\sqrt[3]{\Psi_n(u)}} \sum_{l=1}^2 \frac{1 - \left(1 - \frac{d_l}{\pi} \right)^2}{d_l^2 + 4 \left(1 - \frac{d_l}{\pi} \right) \sin^2 \frac{u - \theta_l}{2}}. \quad (3)$$

Из определения простой функции видно, что ее модуль не превышает $1/2$, поэтому при $u \notin [\theta_1 - 10d_1, \theta_1 + 10d_1] \cup [\theta_2 - 10d_2, \theta_2 + 10d_2]$ установим, что

$$\begin{aligned} |\varphi(u) - D_{4n-2}(u, f)| &= \frac{1}{\Psi_n(u)} \sum_{j=1}^{2n} \frac{|f(u_j)| \sin^4 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\Phi'_n(u_j) \sin^4 \frac{u - u_j}{2}} < \\ &\frac{1}{2\Psi_n(u)} \sum_{l=1}^2 \sum_{\theta_l - d_l < u_j < \theta_l + d_l} \frac{25}{\Phi'_n(u_j) \left(\left(\frac{1}{81} + \frac{400}{81} \right) \sin^2 \frac{u - u_j}{2} \right)^2} < \\ &\frac{1}{2\Psi_n(u)} \sum_{l=1}^2 \sum_{\theta_l - d_l < u_j < \theta_l + d_l} \frac{25}{\Phi'_n(u_j) \left(\frac{(u - u_j)^2}{81\pi^2} + \frac{400}{81} \sin^2 \frac{9(u - \theta_l)}{20} \right)^2} < \\ &\frac{1}{2\Psi_n(u)} \sum_{l=1}^2 \frac{25}{\left(\frac{d_l^2}{\pi^2} + 4 \left(1 - \frac{d_l}{\pi} \right) \sin^2 \frac{u - \theta_l}{2} \right)^2} \sum_{\theta_l - d_l < u_j < \theta_l + d_l} \frac{1}{\Phi'_n(u_j)}. \end{aligned} \quad (4)$$

При $x \in [\theta_l - d_l, \theta_l + d_l]$, $l = 1, 2$ имеем

$$\Phi'_n(x) > \frac{1 - \left(1 - \frac{d_l}{\pi}\right)^2}{\frac{d_l^2}{\pi^2} + 4 \left(1 - \frac{d_l}{\pi}\right) \sin^2 \frac{x - \theta_l}{2}} \geq \frac{\frac{d_l}{\pi}}{\frac{d_l^2}{\pi^2} + d_l^2} = \frac{\pi}{(1 + \pi^2)d_l}. \quad (5)$$

Так как все параметры $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ лежат на лучах $\arg z = \theta_1$, $\arg z = \theta_2$, функция $\Phi'_n(x)$ имеет локальные максимумы в точках θ_1 и θ_2 , локальные минимумы в некоторых точках τ_1 и τ_2 , где $\tau_1 < \theta_1$, $\theta_1 < \tau_2 < \theta_2$, причем $\Phi'_n(x)$ монотонна на каждом из отрезков $[\tau_1, \theta_1]$, $[\theta_1, \tau_2]$, $[\tau_2, \theta_2]$, $[\theta_2, \tau_1 + 2\pi]$. Из определения функции $\Phi_n(x)$ и расположения точек u_j понятно, что $\Phi_n(u_{j+1}) - \Phi_n(u_j) = \pi$, $j = \overline{1, 2n-1}$, с учетом этого при оценке последней суммы в (4) на промежутках убывания $\Phi'_n(x)$ будем заменять единицу на $\Phi'_n(\xi_j)(u_{j+1} - u_j)/\pi$, на промежутках возрастания – на $\Phi'_n(\zeta_j)(u_j - u_{j-1})/\pi$, $\xi_j \in [u_j, u_{j+1}]$, $\zeta_j \in [u_{j-1}, u_j]$. Отношения $\Phi'_n(\zeta_j)/\Phi'_n(u_j)$, $\Phi'_n(\xi_j)/\Phi'_n(u_j)$ будут ограничены в силу монотонности $\Phi'_n(x)$, для оценки же слагаемых, соответствующих ближайшим u_j к τ_1 и τ_2 , воспользуемся (5)

$$\begin{aligned} \sum_{\theta_l - d_l < u_j < \theta_l + d_l} \frac{1}{\Phi'_n(u_j)} &\leq \sum \frac{\Phi'_n(\zeta_j)(u_j - u_{j-1})}{\pi \Phi'_n(u_j)} + \sum \frac{\Phi'_n(\xi_j)(u_{j+1} - u_j)}{\pi \Phi'_n(u_j)} + \frac{2(1 + \pi^2)d_l}{\pi} \leq \\ &\frac{2d_l}{\pi} + \frac{2(1 + \pi^2)d_l}{\pi} < \frac{24d_l}{\pi}. \end{aligned}$$

Подставляя данную оценку в (4), получим

$$|\varphi(u) - D_{4n-2}(u, \varphi)| < \frac{300}{\Psi_n(u)} \sum_{l=1}^2 \frac{\frac{d_l}{\pi}}{\left(\frac{d_l^2}{\pi^2} + 4 \left(1 - \frac{d_l}{\pi}\right) \sin^2 \frac{u - \theta_l}{2}\right)^2} \leq \frac{300}{\Psi_n(u)} \sum_{l=1}^2 \frac{1 - \left(1 - \frac{d_l}{\pi}\right)^2}{\left(\frac{d_l^2}{\pi^2} + 4 \left(1 - \frac{d_l}{\pi}\right) \sin^2 \frac{u - \theta_l}{2}\right)^2},$$

откуда в совокупности с (3) и следует утверждение леммы.

Лемма 3. Если $f(u) = \sum_{k=1}^n (a_k \varphi_k(u) + b_k \psi_k(u))$, где $a_k, b_k \geq 0$, $\varphi_k(u)$ и $\psi_k(u)$ – простые функции с опорными отрезками $[\theta_1 - c_k, \theta_1 + c_k]$ и $[\theta_2 - d_k, \theta_2 + d_k]$ соответственно, причем для каждой четверки $\theta_1, \theta_2, c_k, d_k$, $k = \overline{1, n}$ выполнены условия леммы 2, то существует такой набор параметров $\{\alpha_k\}_{k=1}^m$, $m \leq 4n$, что для определяемого ими оператора D_{4m-2} выполняется неравенство

$$|f(u) - D_{4m-2}(u, f)| < \frac{459}{n} \max \left\{ \sum_{k=1}^n a_k, \sum_{k=1}^n b_k \right\}.$$

Доказательство. Пусть $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$, $S_n = \max\{A_n, B_n\}$. Оператор D_{4m-2} будем строить по системе параметров

$$\begin{aligned} \alpha_{k,i,1} &= \left(1 - \frac{c_k}{\pi}\right) e^{i\theta_1}, \quad k = \overline{1, n}, \quad i = 1, \left[\frac{a_k}{A_n} n\right] + 1, \\ \alpha_{k,i,2} &= \left(1 - \frac{d_k}{\pi}\right) e^{i\theta_2}, \quad k = \overline{1, n}, \quad i = 1, \left[\frac{b_k}{B_n} n\right] + 1. \end{aligned}$$

Их количество удовлетворяет соотношению

$$m = \sum_{k=1}^n \left(\left[\frac{a_k}{A_n} n \right] + \left[\frac{b_k}{B_n} n \right] + 2 \right) \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{A_n} n + \frac{b_k}{B_n} n + 2 \right) = \frac{A_n}{A_n} n + \frac{B_n}{B_n} n + 2n = 4n.$$

В силу леммы 2 и линейности оператора D_{4m-2} для его уклонения от $f(u)$ будем иметь

$$|f(u) - D_{4m-2}(u, f)| < \frac{9}{\sqrt[3]{\Psi_m(u)}} \sum_{k=1}^n \left(a_k \frac{1 - \left(1 - \frac{c_k}{\pi}\right)^2}{\frac{c_k^2}{\pi^2} + 4 \left(1 - \frac{c_k}{\pi}\right) \sin^2 \frac{u - \theta_1}{2}} + b_k \frac{1 - \left(1 - \frac{d_k}{\pi}\right)^2}{\frac{d_k^2}{\pi^2} + 4 \left(1 - \frac{d_k}{\pi}\right) \sin^2 \frac{u - \theta_2}{2}} \right) + \frac{300}{\Psi_m(u)} \sum_{k=1}^n \left(a_k \frac{1 - \left(1 - \frac{c_k}{\pi}\right)^2}{\left(\frac{c_k^2}{\pi^2} + 4 \left(1 - \frac{c_k}{\pi}\right) \sin^2 \frac{u - \theta_1}{2}\right)^2} + b_k \frac{1 - \left(1 - \frac{d_k}{\pi}\right)^2}{\left(\frac{d_k^2}{\pi^2} + 4 \left(1 - \frac{d_k}{\pi}\right) \sin^2 \frac{u - \theta_2}{2}\right)^2} \right). \quad (6)$$

Из леммы 1 следуют соотношения

$$\sqrt[3]{\Psi_m(u)} \geq \sum_{k=1}^n \left(\frac{\left(\left[\frac{a_k}{A_n} n \right] + 1 \right) \left(1 - \left(1 - \frac{c_k}{\pi}\right)^2 \right)}{\frac{c_k^2}{\pi^2} + 4 \left(1 - \frac{c_k}{\pi}\right) \sin^2 \frac{u - \theta_1}{2}} + \frac{\left(\left[\frac{b_k}{B_n} n \right] + 1 \right) \left(1 - \left(1 - \frac{d_k}{\pi}\right)^2 \right)}{\frac{d_k^2}{\pi^2} + 4 \left(1 - \frac{d_k}{\pi}\right) \sin^2 \frac{u - \theta_2}{2}} \right) \geq \quad (7)$$

$$\frac{n}{S_n} \sum_{k=1}^n \left(a_k \frac{1 - \left(1 - \frac{c_k}{\pi}\right)^2}{\frac{c_k^2}{\pi^2} + 4 \left(1 - \frac{c_k}{\pi}\right) \sin^2 \frac{u - \theta_1}{2}} + b_k \frac{1 - \left(1 - \frac{d_k}{\pi}\right)^2}{\frac{d_k^2}{\pi^2} + 4 \left(1 - \frac{d_k}{\pi}\right) \sin^2 \frac{u - \theta_2}{2}} \right),$$

$$\Psi_m(u) \geq \frac{2n}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\frac{a_k}{A_n} \left(1 - \left(1 - \frac{c_k}{\pi}\right)^2 \right)}{\left(\frac{c_k^2}{\pi^2} + 4 \left(1 - \frac{c_k}{\pi}\right) \sin^2 \frac{u - \theta_1}{2}\right)^2} + \frac{\frac{b_k}{B_n} \left(1 - \left(1 - \frac{d_k}{\pi}\right)^2 \right)}{\left(\frac{d_k^2}{\pi^2} + 4 \left(1 - \frac{d_k}{\pi}\right) \sin^2 \frac{u - \theta_2}{2}\right)^2} \right) \geq \quad (8)$$

$$\frac{2n}{3S_n} \sum_{k=1}^n \left(a_k \frac{1 - \left(1 - \frac{c_k}{\pi}\right)^2}{\left(\frac{c_k^2}{\pi^2} + 4 \left(1 - \frac{c_k}{\pi}\right) \sin^2 \frac{u - \theta_1}{2}\right)^2} + b_k \frac{1 - \left(1 - \frac{d_k}{\pi}\right)^2}{\left(\frac{d_k^2}{\pi^2} + 4 \left(1 - \frac{d_k}{\pi}\right) \sin^2 \frac{u - \theta_2}{2}\right)^2} \right).$$

Подставляя оценки (7) и (8) в (6), получим

$$|D_{4m-2}(u, f) - f(u)| < \frac{9 \max\{A_n, B_n\}}{n} + \frac{450 \max\{A_n, B_n\}}{n} = \frac{459 \max\{A_n, B_n\}}{n},$$

и доказательство леммы закончено.

Теорема 1. Если $f(u) \in C_{2\pi}$ четная, выпуклая вниз на отрезке $[0, \pi]$ и $\inf_{0 \leq u < 2\pi} f(u) = 0$, то при подходящем выборе параметров $\{\alpha_k\}_{k=1}^m$, $m \leq 4n - 4$ справедливо порядковое равенство

$$\|f(u) - D_{4m-2}(u, f)\| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Доказательство. Через $\{u_k\}_{k=1}^n$ и $\{v_k\}_{k=1}^n$, $0 \leq u_k, v_k \leq 2\pi$, $k = \overline{1, n}$ обозначим абсциссы точек, для которых $f(u_k) = \frac{f(0)k}{n}$ и $f(v_k) = \frac{f(\pi)k}{n}$. Рассмотрим четную 2π -периодическую ломаную $\varphi(u)$ с вершинами в точках $\left(\pm u_k, f(u_k) - \frac{f(0)k}{n}\right)$, $k = \overline{1, n}$ и $\left(\pm(\pi - v_k), f(v_k) - \frac{f(\pi)k}{n}\right)$, $k = \overline{1, n}$. Для $u \in (-v_1, -u_1) \cup (u_1, v_1)$ положим $\varphi(u) = 0$. Очевидно неравенство

$$\|f(u) - \varphi(u)\| \leq \frac{\|f\|}{n}. \quad (9)$$

Ломаную $\varphi(u)$ можно представить в виде линейной комбинации

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_k \varphi_k(u) + b_k \psi_k(u)), \quad a_k, b_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{n-1} a_k \leq 2f(0), \quad \sum_{k=1}^{n-1} b_k \leq 2f(\pi) \quad (10)$$

простых треугольных функций $\varphi_k(u) = \max\{0, 1 - |u|/u_k\}/2$, $\psi_k(u) = \max\{0, 1 - |u - \pi|/(\pi - v_k)\}/2$, поэтому согласно лемме 3 и (10) существует оператор D_{4m-2} , $m \leq 4n - 4$, для которого справедливо неравенство

$$\|\varphi(u) - D_{4m-2}(u, \varphi)\| \leq \frac{918\|f\|}{n}. \quad (11)$$

Для уклонения этого оператора от функции $f(u)$ с учетом (9) и (11) будем иметь

$$\begin{aligned} \|f(u) - D_{4m-2}(u, f)\| &\leq \|f(u) - \varphi(u)\| + \|\varphi(u) - D_{4m-2}(u, \varphi)\| + \|D_{4m-2}(u, \varphi) - D_{4m-2}(u, f)\| \leq \\ &\frac{\|f\|}{n} + \frac{918\|f\|}{n} + \|D_{4m-2}(u, f - \varphi)\| \leq \frac{919\|f\|}{n} + \|D_{4m-2}\| \cdot \|f(u) - \varphi(u)\| = \frac{920\|f\|}{n}, \end{aligned}$$

и, таким образом, теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если $f(u)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и монотонна на отрезке $[0, \pi]$, то для построения оператора D_{4m-2} достаточно взять параметры $\{\alpha_k\}_{k=1}^m$ только на интервале $(0, 1)$, если $f(u)$ невозрастающая, или только на интервале $(-1, 0)$, если $f(u)$ неубывающая, соответственно степень оператора $4m - 2$, $m \leq 2n - 2$.

Теорема 2. Если $f(u) \in C_{2\pi}$ четная и выпуклая на отрезке $[0, \pi]$, то при подходящем выборе параметров $\{\alpha_k\}_{k=1}^m$, $m \leq 4n - 4$ будет иметь место порядковая оценка

$$\|f(u) - D_{4m-2}(u, f)\| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Доказательство. Любая функция $f(u)$, удовлетворяющая условиям теоремы 2, может быть представлена в виде $f(u) = c + g(u)$ или $f(u) = c - g(u)$, где c – некоторая константа, а $g(u)$ – функция, удовлетворяющая условиям теоремы 2. Согласно теореме 1 существует оператор D_{4m-2} , $m \leq 4n - 4$ такой, что $\|g(u) - D_{4m-2}(u, g)\| = O(n^{-1})$. Тогда с учетом линейности и точности оператора на константах будем иметь

$$\|f(u) - D_{4m-2}(u, f)\| = \|c \pm g(u) - D_{4m-2}(u, c) \mp D_{4m-2}(u, g)\| = \|g(u) - D_{4m-2}(u, g)\| = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

и теорема доказана.

В качестве следствия из теоремы 2 может быть получен результат В. А. Попова и П. П. Петрушева о порядке приближения непрерывных на отрезке выпуклых функций алгебраическими рациональными функциями степени не выше n .

С л е д с т в и е. Пусть $f(x) \in C_{[0,1]}$ и выпуклая. Тогда

$$R_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Л е м м а 4. Если $f(u) \in C_{2\pi}$ четная, выпуклая вниз (вверх) и неубывающая (невозрастающая) на отрезке $[0, \pi/2]$, и $f(\pi/2 - u) = f(\pi/2 + u)$, $u \in [0, \pi]$, то при подходящем выборе параметров $\{\alpha_k\}_{k=1}^m$, $m \leq 4n - 4$ будет справедливо порядковое равенство

$$\|f(u) - D_{4m-2}(u, f)\| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Для доказательства леммы необходимо провести рассуждения, аналогичные рассуждениям в доказательстве теорем 2 и 3 с той лишь разницей, что параметры $\{\alpha_k\}_{k=1}^m$ нужно расположить на лучах $\arg z = -\pi/2$ и $\arg z = \pi/2$, а ломаную $\varphi(u)$ строить по простым треугольным функциям, середины опорных отрезков которых находятся в точках $-\pi/2$ и $\pi/2$.

Доказательство следствия. Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$ непрерывна, выпукла вниз и не возрастает. Рассмотрим функцию $f(\cos u)$, $u \in [0, \pi/2]$. Так как $(f(\cos u))' = -f'(\cos u)\sin u$, $(f(\cos u))'' = f''(\cos u)\sin^2 u - f'(\cos u)\cos u$, $f'(\cos u) \leq 0$, $f''(\cos u) \geq 0$, то $(f(\cos u))' \geq 0$, $(f(\cos u))'' \geq 0$, поэтому можно определить функцию $\varphi(u)$, совпадающую с $f(\cos u)$ на отрезке $[0, \pi/2]$ и удовлетворяющую условиям леммы 4. Согласно теореме 2 существует оператор D_{4m-2} , $m \leq 4n - 4$ такой, что $\|\varphi(u) - D_{4m-2}(u, \varphi)\| = O(n^{-1})$.

$D_{4m-2}(u, \varphi)$ – четная тригонометрическая рациональная функция, поэтому представима в виде $D_{4m-2}(u, \varphi) = r_{4m-2}(\cos u)$, где $r_{4m-2}(x)$ – алгебраическая рациональная функция степени не выше $4m - 2$, значит,

$$\|\varphi(u) - r_{4m-2}(\cos u)\| = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

и, следовательно,

$$\|f(x) - r_{4m-2}(x)\|_{[0,1]} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Аналогичным образом данное соотношение устанавливается для произвольных монотонных выпуклых на отрезке функций.

Любая немонотонная выпуклая на отрезке функция $f(x)$ может быть представлена в виде суммы двух монотонных выпуклых функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Пусть $\bar{r}_{4m-2}(x)$ и $\tilde{r}_{4m-2}(x)$ такие рациональные функции, что

$$\|f_1(x) - \bar{r}_{4m-2}(x)\|_{[0,1]} = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \|f_2(x) - \tilde{r}_{4m-2}(x)\|_{[0,1]} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

и $r_{8m-4}(x) = \bar{r}_{4m-2}(x) + \tilde{r}_{4m-2}(x)$ – рациональная функция степени не выше $8m - 4$. В таком случае

$$\begin{aligned} \|f(x) - r_{8m-4}(x)\|_{[0,1]} &= \|f_1(x) - \bar{r}_{4m-2}(x) + f_2(x) - \tilde{r}_{4m-2}(x)\|_{[0,1]} \leq \\ &= \|f_1(x) - \bar{r}_{4m-2}(x)\|_{[0,1]} + \|f_2(x) - \tilde{r}_{4m-2}(x)\|_{[0,1]} = O\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

откуда и следует утверждение следствия.

В заключение заметим, что аппроксимация линейных комбинаций простых функций интегральными рациональными операторами и ее приложения к нахождению порядковых оценок для наилучших рациональных приближений исследовались А. А. Пекарским [7]. В. Н. Русак и И. В. Рыбаченко [8] использовали линейные комбинации простых функций для приближения сумматорными рациональными операторами выпуклых функций пространства C_∞ .

Литература

1. Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Минск, 1979.
2. Ровба Е. А. Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации. Гродно, 2001.
3. Ровба Е. А. Сумматорные рациональные операторы типа Джексона // Мат. заметки. 1997. Т. 61, № 6. С. 18–22.
4. Гриб Н. В. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 1. С. 17–24.
5. Буланов А. П. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33, № 5. С. 1132–1148.
6. Попов В. А., Петрушев П. П. // Мат. сборник. 1977. Т. 103, № 6. С. 285–292.
7. Пекарский А. А. // Мат. сборник. 1987. Т. 133, № 1. С. 86–102.
8. Русак В. Н., Рыбаченко И. В. // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 1. С. 111–118.

N. V. GRIB

APPROXIMATION OF 2π -PERIODIC PIECEWISE-CONVEX FUNCTIONS BY SUMMATION RATIONAL OPERATORS

Summary

The speed of approximation of 2π -periodic piecewise convex functions by summational rational operators of Jackson's type is found.

УДК 517.948.32:517.544

Э. И. ЗВЕРОВИЧ

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛ СОХОЦКОГО

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 18.11.2011)

Пусть $L \subset \mathbb{C}$ – простая гладкая замкнутая ориентированная кривая, а $\varphi: L \rightarrow \mathbb{C}$ – H -непрерывная функция, дополнительные ограничения на которую будут указаны ниже. Интеграл

$$\Phi^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - z)^{n+1}}, \quad z \notin L, \quad (1)$$

полученный как n -я производная интеграла типа Коши, представляет функцию, аналитическую на множестве $\mathbb{C} \setminus L$ и имеющую следующую асимптотику:

$$\Phi^{(n)}(z) = O(z^{-n-1}), \quad z \rightarrow \infty.$$

В этой статье рассматривается вопрос об условиях, при которых существует предел интеграла (1) при $z \rightarrow t \in L$, $z \notin L$, а также о том, в какой мере на интеграл (1) могут быть обобщены классические формулы Сохоцкого ([1], с. 38):

$$\Phi^\pm(t) = \pm \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t}, \quad t \in L.$$

Здесь в левой части стоят предельные значения слева ($\Phi^+(t) \equiv \Phi(t^+)$) и справа ($\Phi^-(t) \equiv \Phi(t^-)$) на L , а интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Лемма 1. Если для функции $\varphi: L \rightarrow \mathbb{C}$ в окрестности точки $t_0 \in L$ имеет место разложение по формуле Тейлора

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k + r_n(t, t_0), \quad (2)$$

где функция $r_n(t, t_0)$ имеет следующую асимптотику: $r_n(t, t_0) = O((t - t_0)^{n+\lambda})$ при $t \rightarrow t_0$ и при некотором $\lambda \in (0, 1]$, то интеграл $\int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t_0)^{n+1}}$ существует в смысле конечной части по Адамару, и его можно вычислить по формуле:

$$\text{pf} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t_0)^{n+1}} = \pi i \frac{\varphi^{(n)}(t_0)}{n!} + \int_L \frac{r_n(\tau, t_0)}{(\tau - t_0)^{n+1}} d\tau. \quad (3)$$

Доказательство. Интеграл, находящийся в правой части равенства (3), сходится как несобственный, в силу асимптотики функции $r_n(\tau, t_0)$ при $\tau \rightarrow t_0$. Обозначим через D^+ область, ограниченную кривой L и не содержащую точку ∞ . Удалим из контура L все его точки, попадающие в круг $\{|z - t_0| < \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Остальную часть контура обозначим через L_ε . Пусть t' и t'' – соответственно начальная и конечная точки кривой L_ε . Очевидно, что $|t' - t_0| = |t'' - t_0| = \varepsilon$. Используя разложение (2), имеем

$$\int_{L_\varepsilon} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t_0)^{n+1}} = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(t_0)}{k!} \int_{L_\varepsilon} \frac{d\tau}{(\tau - t_0)^{n+1-k}} + \int_{L_\varepsilon} \frac{r_n(\tau, t_0) d\tau}{(\tau - t_0)^{n+1}}. \quad (4)$$

Последний интеграл имеет конечный предел при $\varepsilon \rightarrow +0$. Далее, в силу интегральной теоремы Коши имеем

$$\int_{L_\varepsilon} \frac{d\tau}{\tau - t_0} = \int_{\substack{|\tau - t_0| = \varepsilon \\ \tau \in D^+}} \frac{d\tau}{\tau - t_0} = \int_{t'}^{t''} d \ln(\tau - t_0) = \ln(t'' - t_0) - \ln(t' - t_0) = \\ i \arg(t'' - t_0) - i \arg(t' - t_0) \rightarrow \pi i \text{ при } \varepsilon \rightarrow +0.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$, получим известное равенство

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - t_0} = \pi i,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Остальные интегралы в правой части равенства (4) имеют вид $\int_{L_\varepsilon} \frac{d\tau}{(\tau - t_0)^{v+1}}$, где $v \in \mathbb{N}$. Для их вычисления зафиксируем произвольно точку $t_1 \in L_\varepsilon$, и этой точкой разобьем контур интегрирования на две части $L_\varepsilon = L_\varepsilon' \cup L_\varepsilon''$. Тогда получим

$$\int_{L_\varepsilon} \frac{d\tau}{(\tau - t_0)^{v+1}} = \int_{L_\varepsilon'} \frac{d\tau}{(\tau - t_0)^{v+1}} + \int_{L_\varepsilon''} \frac{d\tau}{(\tau - t_0)^{v+1}} = \left. \frac{1}{v(\tau - t_0)^v} \right|_t^{t_1} - \left. \frac{1}{v(\tau - t_0)^v} \right|_{t_1}^{t''} = \\ \frac{1}{v(t' - t_0)^v} - \frac{1}{v(t'' - t_0)^v}.$$

Здесь оба слагаемых правой части стремятся к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow +0$. Переносим их в левую часть и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$, получим значение интеграла в смысле конечной части по Адамару:

$$\text{pf} \int_L \frac{d\tau}{(\tau - t_0)^{v+1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_{L_\varepsilon'} \frac{d\tau}{(\tau - t_0)^{v+1}} - \frac{1}{v(t' - t_0)^v} + \frac{1}{v(t'' - t_0)^v} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} 0 = 0.$$

Учитывая это и переходя к пределу в равенстве (4), получим равенство (3). Лемма доказана.

Лемма 2 (основная). Если для H -непрерывной функции $\varphi: L \rightarrow \mathbb{C}$ в окрестности точки t_0 имеет место разложение (2), где $|r_n(t, t_0)| \leq H \cdot |t - t_0|^{n+\lambda}$ при $t \rightarrow t_0$ и при некотором $\lambda \in (0, 1]$, то интеграл

$$\Psi(z) = \int_L \frac{r_n(\tau, t_0)}{(\tau - z)^{n+\lambda}} d\tau \quad (5)$$

при $z \rightarrow t_0$, $z \notin L$ стремится к значению

$$\Psi(t_0) = \int_L \frac{r_n(\tau, t_0)}{(\tau - t_0)^{n+\lambda}} d\tau. \quad (6)$$

Доказательство. Разбивая кривую L точками t_0 и t_1 на две части, можно каждый из интегралов (5) и (6) представить в виде суммы интегралов по L_1 и L_2 , и каждый из этих интегралов рассмотреть отдельно (по одной и той же схеме). Поэтому, не ограничивая общности, будем с самого начала считать, что кривая L – разомкнутая с началом в точке t_0 и концом в точке t_1 . Учитывая это, станем оценивать модуль разности между интегралами (5) и (6):

$$\begin{aligned}
|\Psi(z) - \Psi(t_0)| &= \left| \int_L r_n(\tau, t_0) \left[\frac{1}{(\tau - z)^{n+1}} - \frac{1}{(\tau - t_0)^{n+1}} \right] d\tau \right| = \\
& \left| (z - t_0) \int_L r_n(\tau, t_0) \frac{\sum_{v=0}^n (\tau - z)^v (\tau - t_0)^{n-v}}{(\tau - z)^{n+1} (\tau - t_0)^{n+1}} d\tau \right| \leq \\
|z - t_0| \int_L & \left| \frac{r_n(\tau, t_0)}{(\tau - t_0)^{n+1}} \right| \frac{\sum_{v=0}^n |\tau - z|^v |\tau - t_0|^{n-v}}{|\tau - z|^{n+1}} |d\tau| \leq \\
H \cdot |z - t_0| \int_L & \frac{|d\tau|}{|\tau - t_0|^{1-\lambda}} \cdot \frac{\sum_{v=0}^n |\tau - z|^v |\tau - t_0|^{n-v}}{|\tau - z|^{n+1}}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Для продолжения этой оценки введем в рассмотрение уравнение кривой L , выраженное через натуральный параметр (переменную длину дуги):

$$\tau = \tau(s) = x(s) + iy(s), \quad 0 \leq s \leq S, \quad t_0 = \tau(0), \quad t_1 = \tau(S).$$

Имеем $d\tau = d(\tau - t_0) = \tau'(s)ds$, причем $|d\tau| = ds$. Далее, имеем

$$\begin{aligned}
\frac{d|\tau - t_0|}{ds} &= \frac{d}{ds} \sqrt{[x(s) - x(0)]^2 + [y(s) - y(0)]^2} = \\
& \frac{[x(s) - x(0)] \cdot x'(s) + [y(s) - y(0)] \cdot y'(s)}{|\tau - t_0|} = \cos \alpha(s),
\end{aligned}$$

где $\alpha(s)$ – угол между хордой, соединяющей точки t_0 и $\tau(s)$, и касательной к кривой в точке $\tau(s)$. Так как кривая L по предположению гладкая, то функция $\alpha(s)$ – непрерывная, причем $\alpha(0) = 0$. Поэтому

$$\lim_{s \rightarrow +0} \frac{d[\tau(s) - \tau(0)]}{ds} = \lim_{s \rightarrow +0} \cos \alpha(s) = \cos \alpha(0) = \cos 0 = 1.$$

Отсюда в силу локальных свойств непрерывных функций заключаем, что

$$\exists s_1 \in (0, S] \quad \forall s \in [0, s_1]: \quad \frac{1}{2} \leq \frac{d[\tau(s) - \tau(0)]}{ds} \leq 2.$$

Положим теперь $L = L_1 \cup L_2$, где та часть кривой L , для которой $0 \leq s \leq s_1$, а L_2 – остальная часть кривой L . Представим правую часть оценки (7) в виде суммы двух слагаемых $I_1 + I_2$, где в I_1 входит интеграл по L_1 , а в I_2 – интеграл по L_2 . Так как точка t_0 находится на положительном расстоянии от кривой L_2 , то выражение

$$I_2 = H \cdot |z - t_0| \int_{L_2} \frac{\sum_{v=0}^n |\tau - z|^v |\tau - t_0|^{n-v}}{|\tau - z|^{n+1}} \cdot \frac{|d\tau|}{|\tau - t_0|^{1-\lambda}}$$

стремится к нулю при $z \rightarrow t_0$ за счет множителя $|z - t_0|$ (а последний интеграл при этом стремит-

ся к конечному значению $(n+1) \int_{L_2} \frac{|d\tau|}{(\tau - t_0)^{2-\lambda}}$). Обратимся теперь к слагаемому I_1 :

$$I_1 = H \cdot |z - t_0| \int_{L_1} \frac{\sum_{v=0}^n |\tau - z|^v |\tau - t_0|^{n-v}}{|\tau - z|^{n+1}} \cdot \frac{|d\tau|}{|\tau - t_0|^{1-\lambda}} \leq 2H \cdot |z - t_0| \int_0^{|c-t_0|} \frac{\sum_{v=0}^n |\tau - z|^v |\tau - t_0|^{n-v}}{|\tau - z|^{n+1}} \cdot \frac{d|\tau - t_0|}{|\tau - t_0|^{1-\lambda}},$$

где обозначено $\tilde{n} = \tau(s_1)$. В последнем интеграле сделаем замену переменного, полагая

$$|\tau - t_0| = |z - t_0| \cdot u, \quad d|\tau - t_0| = |z - t_0| \cdot du.$$

Тогда получим

$$I_1 \leq 2H \cdot |z - t_0| \int_0^{\frac{|c-t_0|}{|z-t_0|}} \frac{|z - t_0| \sum_{v=0}^n |u - e^{i\varphi}|^v |z - t_0|^n}{u^{1-\lambda} |z - t_0|^{1-\lambda} |z - t_0|^{n+1} |u - e^{i\varphi}|^{n+1}} du =$$

$$2H \cdot |z - t_0|^\lambda \int_0^{\frac{|c-t_0|}{|z-t_0|}} \frac{\sum_{v=0}^n |u - e^{i\varphi}|^v}{u^{1-\lambda} |u - e^{i\varphi}|^{n+1}} du,$$

где множитель $|u - e^{i\varphi}|$ нигде не обращается в нуль. Обозначив далее $t := 1/|z - t_0|$, будем иметь $z \rightarrow t_0 \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$, и тогда

$$I_1 \leq \frac{2H}{t^\lambda} \int_0^{t|c-t_0|} \frac{\sum_{v=0}^n |u - e^{i\varphi}|^v}{u^{1-\lambda} |u - e^{i\varphi}|^{n+1}} du. \quad (8)$$

Применяя к правой части правило Лопиталья, получим при $0 < \lambda < 1$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2H}{t^\lambda} \int_0^{t|c-t_0|} \frac{\sum_{v=0}^n |u - e^{i\varphi}|^v}{u^{1-\lambda} |u - e^{i\varphi}|^{n+1}} du = \frac{2H}{\lambda |c - t_0|^{1-\lambda}} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{v=0}^n |t|c - t_0| - e^{i\varphi}|^v}{|t|c - t_0| - e^{i\varphi}|^{n+1}} = 0.$$

Если же $\lambda = 1$, то такое же заключение имеет место за счет того, что интеграл из (8) имеет асимптотику $O(\ln t)$ при $t \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

Теорема. Если для H -непрерывной функции $\varphi: L \rightarrow \mathbb{C}$ выполнены все условия, перечисленные в леммах 1 и 2, то для интеграла

$$\Phi(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - z)^{n+1}}$$

справедливы следующие обобщения формул Сохоцкого:

$$\Phi(t_0^\pm) = \pm \frac{1}{2} \varphi^{(n)}(t_0) + \frac{n!}{2\pi i} \cdot \text{pf} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t_0)^{n+1}}, \quad t_0 \in L.$$

Доказательство. В силу леммы 2 функция $\Psi(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{r_n(\tau, t_0)}{(\tau - z)^{n+1}} d\tau$ непрерывна в точке

t_0 , и потому $\Psi(t_0^+) = \Psi(t_0^-) = \Psi(t_0)$. Подставляя в последний интеграл выражение для остаточного члена $r_n(\tau, t_0)$ из (2), получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(t_0^+) = \Phi(t_0^+) - \frac{n!}{2\pi i} \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ z \in D^+}} \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(t_0)}{k!} \int_L \frac{(\tau - t_0)^k d\tau}{(\tau - z)^{k+1}} = \Phi(t_0^+) - \varphi^{(n)}(t_0), \\ \Psi(t_0^-) = \Phi(t_0^-), \\ \Psi(t_0) = \frac{n!}{2\pi i} \mathbf{pf} \int_L \frac{\varphi(\tau) - \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(t_0)}{k!} (\tau - t_0)^k}{(\tau - t_0)^{n+1}} d\tau = \frac{n!}{2\pi i} \mathbf{pf} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t_0)^{n+1}} d\tau - \frac{1}{2} \varphi^{(n)}(t_0). \end{array} \right.$$

Из равенства $\Psi(t_0^+) = \Psi(t_0)$ получаем $\Phi(t_0^+) = \frac{1}{2} \varphi^{(n)}(t_0) + \frac{n!}{2\pi i} \mathbf{pf} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t_0)^{n+1}} d\tau$, а из равенства $\Psi(t_0^-) = \Psi(t_0)$ получаем $\Phi(t_0^-) = -\frac{1}{2} \varphi^{(n)}(t_0) + \frac{n!}{2\pi i} \mathbf{pf} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t_0)^{n+1}} d\tau$. Теорема доказана.

Литература

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
2. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. М., 1975.
3. Зверович Э. И. // Труды 4-й международной конф. «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (АМАДЕ-2006)»: в 2 т. Т. 1. Минск, 2006. С. 55–56.

E. I. ZVEROVICH

GENERALIZATION OF SOKHOTSKI'S FORMULAS

Summary

The generalization of the classical Sokhotski–Plemelj formulas to the cases of derivatives of the Cauchy integral is obtained.

УДК 517.987.1+517.986.225

А. Н. ГЛАЗ

ОБЩИЙ ВИД ЛИНЕЙНОГО НЕПРЕРЫВНОГО ФУНКЦИОНАЛА НА ПРОСТРАНСТВЕ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 23.09.2011)

Введение. Пространство G , порожденное кусочно-непрерывными функциями на отрезке, естественно возникает в ряде задач, например, при исследовании интегральных сингулярных уравнений. В частности, свойства сингулярных интегральных операторов с разрывными коэффициентами существенно отличаются от случая непрерывных коэффициентов [1].

Пространство G обладает рядом свойств, интересных с разных точек зрения. Кроме того, это пространство является C^* -алгеброй, и его пространство максимальных идеалов M встречалось ранее в теории общей топологии как пример пространства со специфическими свойствами.

В данной работе описано сопряженное пространство к G . Основным результатом является утверждение, что любой, в том числе конечно-аддитивной, мере на отрезке соответствует однозначно определенная σ -аддитивная мера на M и на борелевской алгебре в этом пространстве все меры автоматически являются σ -аддитивными.

Алгебра G , порожденная кусочно-непрерывными функциями. Под кусочно-постоянными (кусочно-непрерывными) функциями на $[0, 1]$ будем понимать функции $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, для которых существует разбиение $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ такое, что на каждом интервале $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \dots, n$, функция x тождественно равна константе (непрерывна) и непрерывно продолжается на $[t_{k-1}, t_k]$. При этом не требуется, чтобы это продолжение в точке t_k совпадало с $x(t_k)$. Такие функции автоматически являются непрерывными справа в каждой точке. Можно считать, что функция x задана на отрезке $[0, 1]$, если положить $x(1) = \lim_{t \rightarrow 1-0} x(t)$.

Предметом исследования в работе является наименьшее замкнутое подпространство G в пространстве ограниченных функций на $[0, 1]$ с нормой

$$\|x\| = \sup_{t \in [0, 1]} |x|,$$

содержащее все кусочно-непрерывные функции. Как известно (см., например, [2]), это пространство совпадает с множеством функций $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, обладающих конечными пределами слева и непрерывных справа, а также с пространством, порожденным кусочно-постоянными функциями.

Под кусочно-непрерывными функциями можно понимать функции, непрерывные слева, а не справа, что не влияет существенно на рассуждения и результаты данной работы.

Пространство максимальных идеалов алгебры G . Пространство G , очевидно, является коммутативной C^* -алгеброй со стандартными поточечными операциями сложения и умножения и инволюцией, заданной комплексным сопряжением $x^*(t) = \overline{x(t)}$. Тогда по теореме Гельфанда–Наймарка [3] алгебра G изоморфна алгебре всех непрерывных комплексных функций на пространстве $M(G)$ его максимальных идеалов. Это позволяет вместо алгебры разрывных

функций на отрезке рассматривать алгебру непрерывных функций, но заданных на более сложном топологическом пространстве.

Теорема 1. *Максимальными идеалами алгебры являются множества вида*

$$M_{\tau^-} = \{x \in G : x(\tau - 0) = 0\}, \tau \in (0, 1], \quad (1)$$

$$M_{\tau^+} = \{x \in G : x(\tau + 0) = 0\}, \tau \in (0, 1], \quad (2)$$

и только они.

Для описания топологии на множестве $M(G)$ максимальных идеалов рассмотрим множество M , состоящее из двух экземпляров $M^- = (0, 1]$ и $M^+ = [0, 1)$ отрезка $[0, 1]$. Элементарной окрестностью точки $\tau^- \in M^-$ назовем множество, состоящее из полуинтервала $(\tau - \varepsilon, \tau]^- \subset M^-$ и интервала $(\tau - \varepsilon, \tau)^+ \subset M^+$:

$$U(\tau^-) = (\tau - \varepsilon, \tau]^- \cup (\tau - \varepsilon, \tau)^+. \quad (3)$$

Аналогично элементарной окрестностью точки $\tau^+ \in M^+$ назовем множество, состоящее из интервала $(\tau - \varepsilon, \tau)^- \subset M^-$ и полуинтервала $[\tau - \varepsilon, \tau)^+ \subset M^+$:

$$V(\tau^+) = (\tau - \varepsilon, \tau)^- \cup [\tau - \varepsilon, \tau)^+. \quad (4)$$

Теорема 2. *Пространство M гомеоморфно пространству максимальных идеалов $M(G)$ алгебры G в *-слабой топологии. При этом гомеоморфизме точке $\tau^- \in M^-$ ставится в соответствие максимальный идеал M_{τ^-} , а точке $\tau^+ \in M^+$ – максимальный идеал M_{τ^+} . Преобразование Гельфанда имеет вид:*

$$\hat{x}(\tau) = \begin{cases} x(\tau - 0), & \tau \in (0, 1]^- \\ x(\tau + 0), & \tau \in [0, 1)^+ \end{cases} \quad (5)$$

Доказательства теорем 1 и 2 по существу совпадают с доказательством теоремы 2 в работе [4].

В дальнейшем пространство максимальных идеалов будем обозначать $M = (0, 1]^- \cup [0, 1)^+$, а его элементы – τ^- , τ^+ или просто τ , если нет надобности подчеркивать, принадлежит ли τ множеству M^- или M^+ . Пространство непрерывных функций на M будем обозначать \hat{G} .

Топологические свойства пространства максимальных идеалов. 1) Пространство M встречалось ранее в общей теории топологических пространств под названием «две стрелки Александра» [5, 6]. Показано, что пространство M неметризуемое и сепарабельное. Множества $D^\pm = \{r^\pm : r \in \mathbb{Q}\}$ являются всюду плотными счетными в M .

Кроме того, на множестве M может быть задано следующее отношение линейного порядка:

$$\tau^- \prec \tau_1^-, \tau^+ \prec \tau_1^+, \text{ при } \tau < \tau_1, \\ \tau^- \prec \tau^+.$$

При этом соответствующая порядковая топология совпадает с построенной выше на пространстве M .

2) Пространство M вполне несвязно, т. е. любое его подмножество, содержащее более одной точки, несвязно.

Действительно, пусть $A \subset M$ и существуют $\tau_1, \tau_2 \in A, \tau_1 \neq \tau_2$. Выполнено одно из двух следующих условий:

а) $\exists \tau_0 \in (0, 1)$ такое, что $\tau_1 = \tau_0^-$ и $\tau_2 = \tau_0^+$,

б) $\exists \tau_0 \in (0, 1)$ такое, что $\tau_1 \prec \tau_0^- \prec \tau_2$ или $\tau_1 \prec \tau_0^+ \prec \tau_2$.

В любом случае, рассмотрев открытые в M подмножества $U_1 = (0, \tau_0]^- \cup [0, \tau_0)^+$, $U_2 = (\tau_0, 1]^- \cup [\tau_0, 1)^+$, получим, что $U_1 \cap A$ и $U_2 \cap A$ непусты и открыты в A . То есть A несвязно.

3) На пространстве M задано естественное отображение π на отрезок $[0, 1]$:

$$\pi(\tau^-) = \tau, \pi(\tau^+) = \tau.$$

Это отображение является расслоением над отрезком в смысле [7]. Его особенность в том, что оно не локально-тривиальное, поскольку слои над точками 0 и 1 являются одноэлементными, а над остальными точками – двухэлементными.

Сопряженное пространство. По теореме Рисса [8] каждый линейный ограниченный функционал f на $C(M)$ представляется в виде

$$f(x) = \int_M x(t)dv,$$

где v – регулярный борелевский заряд на M , причем соответствие между функционалами и такими зарядами взаимно однозначное.

Теорема 3. Произвольная борелевская мера на M является регулярной и σ -аддитивной.

Введем семейство подмножеств из M

$$S = \{[a, b]^* = (a, b]^- \cup [a, b]^+ : 0 \leq a < b \leq 1\}. \quad (6)$$

Заметим, что его элементы являются открыто-замкнутыми множествами. Более того, S является полукольцом, а также базой топологии на пространстве M .

Доказательство. Докажем первую часть теоремы, т. е. если μ – борелевская мера на M , то она регулярная.

Напомним, что мера μ называется регулярной, если для каждого открытого подмножества U супремум мер всех замкнутых множеств, содержащихся в U , совпадает с мерой множества U .

Пусть

$$\mathbf{A} = \{A : A \in \mathbf{U}, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, C_n \in \mathbf{C}, n = 1, 2, \dots\}, \quad (7)$$

где \mathbf{C} – система всех замкнутых множеств, \mathbf{U} – система всех открытых множеств на пространстве M .

Поскольку верно включение $S \subset \mathbf{U} \cap \mathbf{C}$, то $S \subset \mathbf{A}$. Тогда, минимальная σ -алгебра, порожденная семейством \mathbf{A} , содержит в себе минимальную σ -алгебру, порожденную S , а значит, совпадает с алгеброй борелевских множеств на M .

По теореме 9 из [9] мера μ является регулярной на σ -алгебре, порожденной семейством \mathbf{A} , т. е. на M .

Покажем теперь, что произвольная мера, заданная на минимальном кольце $K(S)$, порожденном семейством S , является σ -аддитивной.

Пусть $A, A_n \in K(S)$ и $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Поскольку $A \in K(S)$, то A является компактным, как объединение конечного числа компактных множеств из S . Множества A_n – открыты, как объединение конечного числа открытых множеств. Значит, из покрытия $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ компактного множества A можно выбрать конечное подпокрытие $\{A_n\}_{i=1}^k$. Тогда

$$m(A) \leq m\left(\bigcup_{i=1}^k A_n\right) \leq \sum_{i=1}^k m(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

То есть m является субаддитивной, а следовательно, и σ -аддитивной мерой.

Произвольная борелевская мера μ на M является мерой на $K(S)$, где она, по доказанному, σ -аддитивна. Тогда для этого сужения допустимо продолжение по Лебегу, которое будет совпадать с μ . Из чего следует, что μ является σ -аддитивной. Теорема доказана.

Таким образом, для описания всех регулярных борелевских мер достаточно рассмотреть продолжения по Лебегу мер, заданных на S .

Теорема 4. *Функция $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ соответствует некоторому борелевскому заряду ν на M по формуле*

$$g(t) = \nu([0, t]^*) \quad (8)$$

тогда и только тогда, когда g есть функция ограниченной вариации и $g(0) = 0$.

Доказательство. Покажем сначала, что если ν – некоторая мера на M , то функция g , заданная формулой (8), монотонно возрастает и $g(0) = 0$. Действительно, если $t = 0$, то $[0, t]^* = \emptyset$, тогда $g(0) = \nu(\emptyset) = 0$. Если $t_1 < t_2$, то $[0, t_1]^* \subset [0, t_2]^*$ и

$$g(t_2) - g(t_1) = \nu([0, t_2]^*) - \nu([0, t_1]^*) = \nu([t_1, t_2]^*) \geq 0.$$

Пусть теперь $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ неубывающая функция. Покажем, что функция ν , заданная на S , для которой выполнено

$$\nu([a, b]^*) = g(b) - g(a),$$

является мерой. Так как g – неубывающая функция, то $\nu([a, b]^*) \geq 0, \forall [a, b]^* \in S$. Следовательно, ν – неотрицательная функция на S . Пусть $[a, b]^* = [a_1, b_1]^* \cup [a_2, b_2]^*, a_1 < a_2$. Тогда $a = a_1, b_1 = a_2, a_2 = b$ и

$$\nu([a_1, b_1]^*) + \nu([a_2, b_2]^*) = g(b_2) - g(a_2) - g(b_1) + g(a_1) = \nu([a, b]^*).$$

Утверждение теоремы следует из того, что произвольную функцию ограниченной вариации можно представить в виде разности монотонно возрастающих функций, а заряд – в виде разности мер [8].

Если выполнено соотношение (8), то будем говорить, что заряд ν порожден функцией g , и обозначим $\nu = \hat{\nu}_g$.

Как известно, монотонная функция g задает меру μ_g на отрезке, которая может не быть σ -аддитивной, а формула (8) такой функции g ставит в соответствие σ -аддитивную меру $\hat{\mu}_g$ на M . Таким образом, одна из установленных связей пространства M с отрезком заключается в том, что каждой мере на отрезке (которая может не быть σ -аддитивной) соответствует однозначно определенная σ -аддитивная мера на M . Естественно возникает вопрос, возможно ли построение такого пространства в более общем случае, но в данной статье он не рассматривается.

Введем обозначение $V_1[0, 1]$ для множества всех функций g ограниченной вариации таких, что $g(0) = 0$. Очевидно, что если $g_1, g_2 \in V_1[0, 1]$ и $g_0 = g_1 + g_2$, то $g_0 \in V_1[0, 1]$ и $\nu_{g_0} = \hat{\nu}_{g_1} + \hat{\nu}_{g_2}$. Тогда из теоремы Рисса и теоремы 4 следует

Теорема 5. *Сопряженное к G пространство изоморфно пространству $V_1[0, 1]$. Изоморфизм устанавливается формулой*

$$V_1[0, 1] \ni g \rightarrow f \in G', \text{ где } f(x) = \int_M \hat{x}(\tau) d\hat{\nu}_g. \quad (9)$$

При этом норма функционала f равняется полной вариации функции g .

Как известно, сопряженное пространство к пространству непрерывных функций задается с помощью функций ограниченной вариации, непрерывных слева. Для кусочно-непрерывных функций формула сохраняется, но линейные ограниченные функционалы задаются всеми функциями ограниченной вариации.

Опишем правила вычисления интегралов (9) в терминах исходных функций $x \in G$.

Теорема 6. Пусть $x \in G$, $g \in V_1[0,1]$, $g = g_0 + \psi$, где g_0 – непрерывная функция ограниченной вариации, а ψ – функция скачков, $\psi(t) = \sum_{t_k \leq t} \psi_k^{(1)} + \sum_{t_k < t} \psi_k^{(2)}$, $\sum_{k=1}^{\infty} (|\psi_k^{(1)}| + |\psi_k^{(2)}|) < +\infty$. Тогда

$$\int_{[0,1]^*} \hat{x}(\tau) d\hat{\nu}_g = \int_{[0,1]} x(\tau) d\nu_g + \sum_{k=1}^{\infty} (x(t_k - 0)\psi_k^{(1)} + x(t_k + 0)\psi_k^{(2)}),$$

где ν_{g_0} – заряд на отрезке, порожденный функцией g .

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\int_{[0,1]^*} \hat{x}(\tau) d\hat{\nu}_{g_0} = \int_{[0,1]} x(\tau) d\nu_{g_0}, \quad (10)$$

$$\int_{[0,1]^*} \hat{x}(\tau) d\hat{\nu}_{\psi} = \sum_{k=1}^{\infty} (x(t_k - 0)\psi_k^{(1)} + x(t_k + 0)\psi_k^{(2)}). \quad (11)$$

Пусть для начала x – кусочно-постоянная функция, т. е. $x(t) = y_i$, если $t \in [a_{i-1}, a_i)^*$, $i = \overline{1, n}$; $a_0 = 0$, $a_n = 1$. Тогда $\hat{x}(t) = y_i$, если $t \in [a_{i-1}, a_i)^*$, $i = \overline{1, n}$. Поскольку функции x и \hat{x} являются простыми на соответствующих пространствах, то

$$\int_{[0,1]} x(\tau) d\nu_{g_0} = \sum_{i=1}^n y_i \nu_{g_0}([a_{i-1}, a_i]) = \sum_{i=1}^n y_i \hat{\nu}_{g_0}([a_{i-1}, a_i]^*) = \int_{[0,1]^*} \hat{x}(\tau) d\hat{\nu}_{g_0}.$$

Равенство (10) для произвольной функции $x \in G$ следует из того, что существует равномерно сходящая к ней последовательность кусочно-постоянных функций.

Для меры, порожденной ψ , выполнено

$$\hat{\nu}_{\psi}(\{\tau\}) = \begin{cases} \psi_k^{(1)}, & \tau = t_k^-, \\ \psi_k^{(2)}, & \tau = t_k^+, \\ 0, & \tau \neq t_k^{\pm}. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{[0,1]^*} \hat{x}(\tau) d\hat{\nu}_{\psi} = \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{x}(t_k^-) \hat{\nu}_{\psi}(t_k^-) + \hat{x}(t_k^+) \hat{\nu}_{\psi}(t_k^+)) = \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{x}(t_k^-) \psi_k^{(1)} + \hat{x}(t_k^+) \psi_k^{(2)}). \quad (12)$$

Из равенства (12) с учетом (5) получим (11). Теорема доказана.

В работе [10] сопряженное пространство к алгебре G было построено с помощью интеграла Перрона–Стилтьеса. С помощью пространства максимальных идеалов получена явная формула для вычисления интегралов на пространстве M , а значит, и функционалов на G .

Заключение. В данной работе построено пространство максимальных идеалов M и с его помощью показано, что сопряженное пространство к пространству, порожденному кусочно-непрерывными функциями, изоморфно пространству функций ограниченной вариации. Оказалось также, что любой мере на отрезке соответствует однозначно определенная σ -аддитивная мера на M и на борелевской алгебре в этом пространстве M все меры являются σ -аддитивными.

Литература

1. Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев, 1973.
2. Родионов В. И. // Известия высших учебных заведений. Удмурт. гос. университет. 2007. № 2 (537). С. 79–82.
3. Мерфи Дж. C^* -алгебры и теория операторов / Пер. с англ. под ред. проф. А. Я. Хелемского. М., 1997.

4. Глаз А. Н. // Труды 5-й международной конф. «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (АМАДЕ-2009)»: в 2 т. Т. 2. Дифференц. уравнения и соврем. проблемы механики. Минск, 2010. С. 48–52.
5. Александров П. С. Введение в общую теорию множеств и функций. М., 1948.
6. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М., 1977.
7. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. М., 1970.
8. Кадец В. М. Курс функционального анализа: Учебное пособие для студентов механико-математического факультета. Харьков, 2006.
9. Ручанова З. // Matematický časopis 17. 1967. N 1. S. 38–47.
10. Tvrđý M. // Časopis pro pěstování matematiky. 1989. Vol. 114. N 2. S. 187–209.

H. N. HLAZ

**GENERAL VIEW OF A LINEAR CONTINUOUS FUNCTIONAL
IN THE SPACE OF PIECEWISE CONTINUOUS FUNCTIONS**

Summary

A minimal subspace G in the bounded function space that contains piecewise continuous functions on $[0, 1]$ is considered. Some properties of measures in the space of maximal ideals $M(G)$ is obtained. The interfacial space to G is constructed.

УДК 517.512.2

В. Т. ДАЦЫК

ОБОБЩЕННЫЕ СРЕДНИЕ СОПРЯЖЕННОГО ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ С СУЩЕСТВЕННО ОГРАНИЧЕННОЙ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина

(Поступила в редакцию 10.11.2010)

В задачах математической физики чаще всего применяются либо численные, либо асимптотические методы, причем получение асимптотических представлений во многих случаях дает возможность провести наиболее полный анализ задачи.

Известно, что одним из направлений в теории суммирования рядов и интегралов Фурье является изучение линейных методов суммирования на различных классах функций. Основной задачей в этом направлении является нахождение для данного метода суммирования асимптотических представлений точных верхних граней оператора, построенного на базе ряда (интеграла) Фурье или сопряженных им структур, для функций из заданного компактного класса. Первым отправным результатом в этом направлении была работа А. Н. Колмогорова (1935 г.), в которой он показал, что

$$\sup \|f(x) - S_n(f; x)\|_C = \frac{4M}{\pi^2} \cdot \frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right), f \in MW^r,$$

где $S_n(f; x)$ – частичные суммы ряда Фурье.

MW^r – класс 2π -периодических функций $f(x)$, у каждой из которых существуют и абсолютно непрерывны все производные до $(r-1)$ -го порядка, и почти всюду производная $f^{(r)}(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|f^{(r)}(x)| \leq M < \infty.$$

Многие авторы (С. М. Никольский, В. К. Дзядык, П. П. Коровкин, А. К. Покало и др.) обобщали указанный результат А. Н. Колмогорова в различных направлениях. В большинстве случаев в своих исследованиях авторы исходили от рядов Фурье.

В нашей работе вводится класс линейных методов суммирования интегралов и сопряженных интегралов Фурье. Указанный класс включает в себя многие известные классические методы суммирования (средних Фейера, метод Бернштейна–Рогозинского, средние Рисса, метод типичных средних и т. д.). На базе сопряженного интеграла Фурье с помощью указанного класса методов суммирования построены обобщенные средние для функций, имеющих дробные производные, определенные в терминах преобразований Фурье. Для указанных обобщенных средних найдены асимптотические представления.

Рассмотрим класс комплекснозначных функций f действительного переменного

$$W[L; (iu)^\alpha] = \left\{ f(x) \in L(-\infty, \infty) \left| \begin{array}{l} (iu)^\alpha \tilde{f}(u) = \tilde{\varphi}(u) \\ \varphi(x) \in L(-\infty, +\infty), \alpha > 0 \end{array} \right. \right\}, \quad (1)$$

причем

$$(iu)^\alpha = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{2}\alpha} u^\alpha, & u \geq 0, \\ e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha} |u|^\alpha, & u < 0 \end{cases} \quad (2)$$

(см., например, [1] или [2]).

В этом случае функция φ называется дробной производной порядка α , $\alpha > 0$, в смысле Римана – Лиувилля функции f в терминах преобразований Фурье.

Дополнительно потребуем, чтобы указанная дробная производная удовлетворяла неравенству

$$\text{vrai sup}_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| \leq 1. \quad (3)$$

Класс функций φ обозначим через K .

Для функций $f \in W[L; (iu)^\alpha]$ на базе сопряженного интеграла Фурье построим обобщенные средние

$$\overline{U}_\lambda(f; x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \overline{K}_\lambda(t, \delta, m) dt, \quad (4)$$

где

$$\overline{K}_\lambda(t, \delta, m) = -\int_0^\lambda \sum_{m \in M} a_m(\lambda) \left(\frac{u}{\lambda}\right)^m \sin\left(ut - \frac{\delta\pi}{2}\right) du, \quad (5)$$

$M := \{m\}$ – ограниченное снизу не более чем счетное множество действительных чисел, δ – любое действительное число.

Обобщенные ряды

$$\sum_{m \in M} a_m(\lambda) \left(\frac{u}{\lambda}\right)^m \quad (6)$$

и

$$A_\lambda := \sum_{m \in M} (1+|m|) |a_m(\lambda)| \quad (7)$$

сходятся для $0 \leq u \leq \lambda$, $\lambda > 0$, а также существует такое неотрицательное число l , что $A_\lambda = O(\lambda^l)$, $\lambda \rightarrow +\infty$.

Из определения дробной производной $\varphi^{(\alpha)}$ следует тождество

$$\int_0^\infty du \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \sin\left(ut - \frac{\delta\pi}{2}\right) du = \int_0^\infty u^{-\alpha} du \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-t) \sin\left(ut - \frac{\varepsilon\pi}{2}\right) dt, \quad (8)$$

где $\varepsilon = \alpha + \delta$.

Положим

$$f_{p,\delta}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty u^{p-\alpha} du \int_{-\infty}^\infty \varphi(x-t) \cos\left(ut - \frac{\delta\pi}{2}\right) dt, \quad (9)$$

где $0 \leq p < \alpha$ и $f = f_{0,\delta}$, а также

$$\overline{f}_{p,\delta}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty u^{p-\alpha} du \int_{-\infty}^\infty \varphi(x-t) \sin\left(ut - \frac{\delta\pi}{2}\right) dt. \quad (10)$$

Тогда дробные производные порядка $p > 0$ функции f и сопряженной ей \overline{f} будут соответственно

$$f^{(p)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty u^{p-\alpha} du \int_{-\infty}^\infty \varphi(x-t) \cos\left(ut - \frac{\delta+p}{2}\pi\right) dt, \quad (11)$$

$$\bar{f}^{(p)}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} u^{p-\alpha} du \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-t) \sin\left(ut - \frac{\delta+p}{2}\pi\right). \quad (12)$$

и

$$\overline{f_{p,\delta}}(x) = \bar{f}^{(p)}(x) \cos \frac{p\pi}{2} - f^{(p)}(x) \sin \frac{p\pi}{2}. \quad (13)$$

Введем обозначения:

$$S_{\lambda,p}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-t) dt \int_0^{\lambda} u^p \cos ut du, \quad (14)$$

$$\overline{S_{\lambda,p}}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-t) dt \int_0^{\lambda} u^p \sin ut du, \quad (15)$$

$$r_{\lambda,p}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-t) dt \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{\cos ut}{u^p} du, \quad (16)$$

$$\overline{r_{\lambda,p}}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-t) dt \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{\sin ut}{u^p} du, \quad (17)$$

$$H_{\lambda,u}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{u}}^{+\infty} (\varphi(x-t) - \varphi(x+t)) \frac{\cos \lambda t}{t} dt. \quad (18)$$

Справедливы следующие леммы:

Л е м м а 1. Если $\varphi \in K$ и $p > 1$, то

$$\text{а) } S_{\lambda,p}(x) = (S_{\lambda,0}(x) + (2p-1)\Theta)\lambda^p, \quad (19)$$

$$\text{б) } \overline{S_{\lambda,p}}(x) = \left(H_{\lambda,\lambda}(x) + \frac{9p}{2\pi}\Theta\right)\lambda^p, \quad (20)$$

$$\text{в) } r_{\lambda,p}(x) = (-S_{\lambda,0}(x) + (2p+1)\Theta)\lambda^{-p}, \quad (21)$$

$$\text{г) } \overline{r_{\lambda,p}}(x) = \left(-H_{\lambda,\lambda}(x) + \frac{6p-2}{\pi}\Theta\right)\lambda^{-p}, \quad (22)$$

где Θ зависит от λ и p , а также $|\Theta| \leq 1$ (здесь и дальше).

Л е м м а 2. Если $\varphi \in K$ и $p = 1$, то

$$\text{а) } S_{\lambda,1}(x) = (S_{\lambda,0}(x) + \Theta)\lambda, \quad (23)$$

$$\text{б) } \overline{S_{\lambda,1}}(x) = \left(H_{\lambda,\lambda}(x) + \frac{5}{2\pi}\Theta\right)\lambda, \quad (24)$$

$$\text{в) } r_{\lambda,1}(x) = (-S_{\lambda,0}(x) + 3\Theta)\lambda^{-1}, \quad (25)$$

$$\text{г) } \overline{r_{\lambda,1}}(x) = \left(-H_{\lambda,\lambda}(x) + \left(\frac{4}{\pi} + 1\right)\Theta\right)\lambda^{-1}. \quad (26)$$

Л е м м а 3. Если $\varphi \in K$ и $p = 0$, то

$$\overline{S_{\lambda,0}}(x) = H_{\lambda,\lambda}(x) - H_{0,\lambda}(x) + \frac{\Theta}{2\pi}, \quad (27)$$

где

$$H_{0,\lambda}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} \frac{\varphi(x-t) - \varphi(x+t)}{t} dt. \quad (28)$$

Л е м м а 4. Если $\varphi \in K$ и $0 < p < 1$, то

$$а) S_{\lambda,p}(x) = \left(S_{\lambda,0}(x) + \Theta \left(\frac{2}{\pi} \ln \lambda + \frac{2}{\pi} + \|\varphi\|_L \right) \right) \lambda^p, \quad (29)$$

$$б) \overline{S_{\lambda,p}}(x) = \left(H_{\lambda,\lambda}(x) + \Theta \left(\frac{2}{\pi} \ln \lambda + \frac{1}{2\pi} + \|\varphi\|_L \right) \right) \lambda^p, \quad (30)$$

$$в) r_{\lambda,p}(x) = (-S_{\lambda,0}(x) + \Theta(2p+1)) \lambda^{-p}, \quad (31)$$

$$г) \overline{r_{\lambda,p}}(x) = \left(-H_{\lambda,\lambda}(x) + \Theta \left(\frac{4p}{\pi} + \frac{1}{\sin \frac{p\pi}{2} \cdot \Gamma(p)} + \frac{2}{\pi(1-p)} \right) \right) \lambda^{-p}, \quad (32)$$

где $\Gamma(p)$ – гамма-функция.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 1.

Интегрируя дважды по частям во внутреннем интеграле (14) и учитывая тождества

$$\lambda^{p-1} + (1-p) \int_0^\lambda u^{p-2} du = 0 \quad (33)$$

и

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 mx}{x^2} dx = |m| \frac{\pi}{2}, \quad (34)$$

установим справедливость заключения а) леммы 1.

Для доказательства равенства (20) правую часть (15) представим следующим образом:

$$S_{\lambda,p}(x) = -\frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{\lambda}} + \int_{\frac{1}{\lambda}}^\infty \right) (\varphi(x-t) - \varphi(x+t)) dt \int_0^\lambda u^p \sin ut du = I_1 + I_2. \quad (35)$$

Воспользовавшись второй теоремой о среднем, получим следующую оценку:

$$|I_1| \leq \frac{\lambda^p}{2\pi} < \lambda^p \quad (36)$$

для любого $p \geq 0$.

Для I_2 , дважды интегрируя по частям внутренний интеграл и проведя оценки, получим:

$$I_2 = \left(H_{\lambda,\lambda}(x) + \frac{4p}{\pi} \Theta \right) \lambda^p. \quad (37)$$

Из равенства (35) и оценок (36), (37) следует справедливость заключения б) леммы 1.

Оценку повторного интеграла для $r_{\lambda,p}(x)$ будем проводить при условии $p > 0$.

Проинтегрировав дважды по частям внутренний интеграл (16) и учитывая тождество

$$-\frac{1}{\lambda^{p+1}} + (p+1) \int_\lambda^\infty \frac{du}{u^{p+2}} = 0, \quad (38)$$

доказываем справедливость равенства (21).

Последнее из заключений леммы 1 доказываем аналогично, как и равенство (20).

З а м е ч а н и е 1. Доказательство лемм 2 и 3 во многом проводится аналогично, как и леммы

4. Проинтегрировав по частям внутренний интеграл в (14), получим:

$$S_{\lambda,p}(x) = \left(S_{\lambda,0}(x) - \frac{p}{\lambda^p} \int_0^\lambda u^{p-1} S_{u,0}(x) du \right) \lambda^p. \quad (39)$$

Преобразуем (с учетом (14)) $S_{u,0}(x)$ и оценим сверху $|S_{u,0}(x)|$:

$$S_{u,0}(x) = \frac{1}{\pi_0} \int_0^{\infty} (\varphi(x-t) + \varphi(x+t)) \frac{\sin \lambda t}{t} dt,$$

$$|S_{u,0}(x)| = \left| \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{\lambda}} \int_{\frac{1}{\lambda}}^1 \int_1^{\infty} (\varphi(x-t) + \varphi(x+t)) \frac{\sin ut}{t} dt \right) \right| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3|. \quad (40)$$

Тогда

$$|I_1| \leq \frac{2u}{\pi\lambda}, \quad (41)$$

$$|I_2| \leq \frac{2}{\pi} \ln \lambda \quad (42)$$

и

$$|I_3| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt = \|\varphi\|_L. \quad (43)$$

С учетом оценок (41) – (43) получим:

$$|S_{u,0}(x)| \leq \frac{2u}{\pi\lambda} + \frac{2 \ln \lambda}{\pi} + \|\varphi\|_L \quad (44)$$

и

$$\left| \frac{p}{\lambda^p} \int_0^{\lambda} u^{p-1} S_{u,0}(x) du \right| \leq \frac{2p}{\pi(p+1)} + \frac{2}{\pi} \ln \lambda + \|\varphi\|_L. \quad (45)$$

Из (39) и (45) следует справедливость заключения а) леммы 4.

Равенство (30) доказывается аналогично, как и предыдущее, а справедливость равенства (31) была доказана в лемме 1.

Докажем четвертое заключение леммы 4. Имеем:

$$\overline{r_{\lambda,p}}(x) = -\frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{\lambda}} + \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} \right) (\varphi(x-t) - \varphi(x+t)) dt \int_{\frac{\lambda}{u}}^{\infty} \frac{\sin ut}{u^p} du = I_4 + I_5. \quad (46)$$

Представим I_4 следующим образом:

$$I_4 = -\frac{1}{\pi_0} \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (\varphi(x-t) - \varphi(x+t)) dt \int_0^{\infty} \frac{\sin ut}{u^p} du +$$

$$-\frac{1}{\pi_0} \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} (\varphi(x-t) - \varphi(x+t)) dt \int_0^{\lambda} \frac{\sin ut}{u^p} du = I'_4 + I''_4. \quad (47)$$

Кроме того, воспользуемся равенством:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x^p} dx = \frac{\pi m^{p-1}}{2 \sin \frac{p\pi}{2} \cdot \Gamma(p)}, \quad (48)$$

где $0 < p < 2, m > 0$ (см. [4, с. 194]).

Тогда получим:

$$I'_4 = \frac{\Theta}{\sin \frac{p\pi}{2} \cdot \Gamma(p)} \lambda^{-p} \quad (49)$$

и

$$|I_4^n| \leq \frac{2\lambda^{-p}}{\pi(1-p)}. \quad (50)$$

Оцениваем I_5 так же, как и соответствующий повторный интеграл из $\overline{r_{\lambda,p}}(x)$ в лемме 1.

Из последнего утверждения, равенств (46) – (47) и оценок (49) – (50) следует справедливость заключения (32) леммы 4.

З а м е ч а н и е 2. Преобразуем указанное заключение (32), воспользовавшись следующими оценками:

$$\text{а) } \sin t \geq \frac{2}{\pi}t, \text{ если } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\text{б) } \Gamma(x) > 1 \text{ при } 0 < x < 1.$$

Тогда

$$\left| \frac{\Theta}{\sin \frac{p\pi}{2} \cdot \Gamma(p)} \right| \leq \frac{1}{p}. \quad (51)$$

Окончательно при $0 < p < 1$ получим:

$$\overline{r_{\lambda,p}}(x) = \left(-H_{\lambda,\lambda}(x) + \Theta \left(\frac{4p}{\pi} + \frac{1}{p} + \frac{2}{\pi(1-p)} \right) \right) \lambda^{-p}. \quad (52)$$

Т е о р е м а 1. Если $f \in W[L; (iu)^\alpha]$ и $\varphi \in K$, то для построенных обобщенных средних сопряженного интеграла Фурье справедливо представление

$$\begin{aligned} \overline{U}_\lambda(f; x) = \overline{A}_\lambda(f; x) + \lambda^{-\alpha} \left(\overline{B}_\lambda(f; x) \sum_{m \in M} a_m(\lambda) + \right. \\ \left. 8(\alpha+1)\overline{C}_\lambda + 2\overline{D}_\lambda + 2\overline{K}_\lambda \right) \Theta, \end{aligned} \quad (53)$$

где

$$\overline{A}_\lambda(f; x) \equiv 0, \text{ если } (-\infty, \alpha] \cap M = \emptyset$$

и в противном случае

$$\overline{A}_\lambda(f; x) = \sum_{m < \alpha} \frac{a_m(\lambda)}{\lambda^m} f_{m,\varepsilon}(x) - \frac{a_\alpha(\lambda)}{\lambda^\alpha} H_{0,\lambda}(x) \cos \frac{\varepsilon\pi}{2}, \quad (54)$$

$$\overline{B}_\lambda(f; x) = S_{\lambda,0}(x) \sin \frac{\varepsilon\pi}{2} + H_{\lambda,\lambda}(x) \cos \frac{\varepsilon\pi}{2}, \quad (55)$$

$$\overline{C}_\lambda = \sum_{m \in M \setminus (\alpha, \alpha+1)} (1+|m|) |a_m(\lambda)|, \quad (56)$$

$$\overline{D}_\lambda = \sum_{m \in (\alpha, \alpha+1)} |a_m(\lambda)| (|\ln \lambda| + \|\varphi\|_L + 1), \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \overline{K}_\lambda = \left| \cos \frac{\varepsilon\pi}{2} \right| \left(\sum_{m \in \left(\alpha-1, \alpha-\frac{1}{2}\right]} |a_m(\lambda)| (1+m-\alpha)^{-1} + \right. \\ \left. \sum_{m \in \left(\alpha-\frac{1}{2}, \alpha\right]} |a_m(\lambda)| (\alpha-m)^{-1} \right). \end{aligned} \quad (58)$$

Доказательство. Используя равенство (5), указанные обобщенные средние сопряженного интеграла Фурье представим в виде:

$$\overline{U}_\lambda(f; x) = \sum_{m \in M} \frac{a_m(\lambda)}{\lambda^m} \overline{V}_m(x), \quad (59)$$

где $\overline{V}_m(x)$ с учетом (4), (5), (10)–(13), (16) и (17) при $m < \alpha$ будет:

$$\overline{V}_m(x) = \overline{f_{m,\varepsilon}}(x) - \overline{r_{\lambda,\alpha-m}}(x) \cos \frac{\varepsilon\pi}{2} - r_{\lambda,\alpha-m}(x) \sin \frac{\varepsilon\pi}{2}, \quad (60)$$

где $p = \alpha - m$.

Если же $m \geq \alpha$ ($m - \alpha = p$), то, дополнительно учитывая еще (вместо (16) и (17)) (14) и (15), будем иметь:

$$\overline{V}_m(x) = \overline{S_{\lambda,m-\alpha}}(x) \cos \frac{\varepsilon\pi}{2} - S_{\lambda,m-\alpha}(x) \sin \frac{\varepsilon\pi}{2}. \quad (61)$$

Из равенств (59) и (60), а также из лемм 1–4 следует справедливость заключения нашей теоремы.

Рассмотрим конкретный метод суммирования, например, типичные средние порядка ν , $\nu > 0$. В этом случае

$$\overline{K}_\lambda(t, \delta, \nu) = - \int_0^\lambda \left(1 - \left(\frac{u}{\lambda} \right)^\nu \right) \sin \left(ut - \frac{\delta\pi}{2} \right) du. \quad (62)$$

Тогда

$$\overline{U}_\lambda(f, x) = \overline{f_{0,\varepsilon}}(x) + \overline{a_{\nu,\alpha}} + \lambda^{-\alpha} \left(8(2+\nu)(\alpha+1) + 2\overline{b_{\nu,\alpha}} + 2(\overline{c_{\nu,\alpha}} + \overline{c'_{\nu,\alpha}}) \right) \left| \cos \frac{\varepsilon\pi}{2} \right| \Theta, \quad (63)$$

где

$$\overline{a_{\nu,\alpha}} = \begin{cases} -\lambda^{-\nu} \overline{f_{\nu,\varepsilon}}(x), & \text{если } \alpha > \nu, \\ \lambda^{-\nu} H_{0,\lambda}(x) \cos \frac{\varepsilon\pi}{2}, & \text{если } \alpha = \nu, \\ 0, & \text{если } \alpha < \nu, \end{cases}$$

$$\overline{b_{\nu,\alpha}} = \begin{cases} |\ln(\lambda)| + \|\varphi\|_L + 1, & \text{если } \nu - 1 < \alpha < \nu, \\ 0, & \text{для других } \alpha \end{cases}$$

$$\overline{c_{\nu,\alpha}} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{если } \frac{1}{2} \leq \alpha < 1, \\ \frac{1}{\alpha}, & \text{если } 0 < \alpha < \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \overline{c'_{\nu,\alpha}} = \begin{cases} \frac{1}{1+\nu-\alpha}, & \text{если } \frac{1}{2} + \nu \leq \alpha < 1 + \nu, \\ \frac{1}{\alpha-\nu}, & \text{если } \nu < \alpha < \nu + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 3. Аналогично можно рассмотреть и многие другие классические методы суммирования (Рисса, Фейера, Бернштейна – Рогозинского и т. д.).

В [3] исследован случай, когда дробная производная порядка α , $0 < \alpha < 1$ функции f удовлетворяет условию Гельдера.

Полученные результаты можно использовать для разработки аппроксимационных методов решения дифференциальных уравнений и систем дробного порядка.

Літэратура

1. *Nessel R. J., Trebels W.* // Proc. Conf. Contr. Theory Funct. Budapest, 1969–1972. P. 331–341.
2. *Лизоркин П. И.* // Известия АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29, № 1. С. 109–126.
3. *Семенчук Н. П.* // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Сер. прыродазн. навук (матэматыка, фізіка, хімія, біялогія). 2003. № 3(36). С. 30–35.
4. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. Пер. с англ. 2-е изд., испр. М., 1966.

V. T. DASYK

GENERALIZED AVERAGES OF CONJUGATE FOURIE'S INTEGRAL OF FUNCTION WITH AN ESSENTIALLY BOUNDED FRACTIONAL DERIVATIVE

Summary

On the basis of Fourier's conjugate integral and with the help of the introduced class of summation methods a generalized average for the functions is formulated, which have fractional derivatives in terms of Riemann–Liouville determined in the terms of Fourier transformations. For this average, an asymptotic formula like Voronovsky's one is found with precision up to constants.

УДК 512.542

С. Н. ВОРОБЬЕВ

О ФОРМАЦИЯХ ФИШЕРА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова

(Поступила в редакцию 03.06.2011)

В исследованиях структуры классов и канонических подгрупп конечных групп во многих случаях определяющую роль играют формации Фиттинга – классы групп, которые одновременно являются формациями и классами Фиттинга (см., например, [1, теорема 3.1] и [2, XI.1]). Напомним, что формацией называют класс групп \mathfrak{F} , если \mathfrak{F} замкнут относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений, а классом Фиттинга – класс групп \mathfrak{F} , замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных \mathfrak{F} -подгрупп. Уже в 60-е годы прошлого столетия Фишер [3], а позднее, Хартли [4] и Хоукс [5], исследуя задачу дуализации теории формаций теории классов Фиттинга, использовали для этих целей классы конечных разрешимых групп G , замкнутые относительно подгрупп вида PN , где P и N – силовская p -подгруппа и нормальная подгруппы G соответственно. В последующем такие классы групп стали называть классами Фишера [4]. Примечателен тот факт, что многие известные классы групп (в частности, ввиду теоремы Брайса–Косси [6], все разрешимые наследственные классы Фиттинга) являются одновременно классами Фишера и локальными формациями. Более того, взаимосвязь между классами Фишера и локальными формациями была обусловлена следующими обстоятельствами. Во-первых, как показано в [2, IX, теорема 3.6 (b)], локальная формация \mathfrak{F} является классом Фишера в точности тогда, когда все значения ее канонического локального спутника F являются классами Фишера. Во-вторых, Хоуксом [6] (см. также [2, IX, теорема 3.5]) была получена изящная характеристика классов Фишера \mathfrak{F} посредством оператора замыкания, определяемого свойством субнормальности \mathfrak{N} -корадикалов \mathfrak{F} -групп, где \mathfrak{N} – формация всех нильпотентных групп.

В настоящей работе, используя концепцию частичной локализации, предложенную Л. А. Шеметковым и А. Н. Скибой [7], мы расширяем первый из указанных выше результатов на случай частично локальных формаций. В частности, доказано (теорема 2.5(1)), что ω -локальная формация является классом Фишера тогда и только тогда, когда все значения ее канонического ω -локального спутника – классы Фишера.

Мы также обобщаем понятие класса Фишера, определяя \mathfrak{N}^k -классы Фишера, и находим описание таких классов в терминах максимальных подгрупп и \mathfrak{N}^{k+1} -радикалов групп. Напомним, что через \mathfrak{N}^k обозначают локальную формацию всех групп нильпотентной длины $\leq k$. Заметим, что \mathfrak{N}^k -класс Фишера является классом Фишера в случае, когда $k = 1$.

В работе рассматриваются только конечные группы, если не оговорено противное. В терминологии и обозначениях мы следуем [1, 2].

1. Предварительные сведения. Если \mathfrak{F} – непустая формация, то через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначают наименьшую нормальную подгруппу группы G , факторгруппа по которой принадлежит \mathfrak{F} , и $G^{\mathfrak{F}}$ называют \mathfrak{F} -корадикалом G . Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – формации. Тогда их произведением называется класс групп $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G: G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F})$. Хорошо известно, что произведение двух любых формаций снова является формацией и операция умножения формаций ассоциативна (см. например, [2, IV, теорема 1.8]).

Мы будем использовать концепцию частичной локализации формаций, предложенную в работе [7], которая состоит в следующем. Пусть ω – некоторое непустое множество простых чисел и ω' – дополнение множества ω во множестве всех простых чисел \mathbb{P} . Тогда функцию вида

$$f: \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$$

называют ω -локальным спутником [7]. При этом $\text{Supp}(f) = \{a \in \omega \cup \{\omega'\}: f(a) \neq \emptyset\}$ – это носитель ω -локального спутника.

Для произвольного ω -локального спутника f через $LF_\omega(f)$ обозначают класс групп $(G: G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$), где $O_\omega(G)$ и $F_p(G)$ – ω -радикал группы G и p -нильпотентный радикал группы G соответственно.

Формацию \mathfrak{F} называют ω -локальной [7], если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ для некоторого ω -локального спутника f . Заметим, что если $\omega = \mathbb{P}$, то ω -локальную формацию называют локальной, а ее ω -локальный спутник f – локальным.

Ввиду [7] и [8, теорема 2], ω -локальная формация определяется формулой $LF_\omega(f) = (\bigcap_{p \in \pi_2} \mathfrak{E}_p) \cap (\bigcap_{p \in \pi_1} \mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p f(p)) \cap \mathfrak{E}_\omega f(\omega')$. При этом $\pi_1 = \text{Supp}(f) \cap \omega$ и $\pi_2 = \omega \setminus \pi_1$.

Пусть \mathfrak{X} – произвольная совокупность групп и p – простое число. Тогда формация

$$\mathfrak{X}(F_p) = \begin{cases} \text{form}(G/F_p(G): G \in \mathfrak{X}), & \text{если } p \in \sigma(\mathfrak{X}), \\ \emptyset, & \text{если } p \notin \sigma(\mathfrak{X}), \end{cases}$$

где $\sigma(\mathfrak{X})$ – множество всех простых делителей всех групп из \mathfrak{X} .

Мы будем использовать также каноническое задание ω -локальной формации, которое представляет

Л е м м а 1 [7]. *Каждая ω -локальная формация \mathfrak{F} определяется ω -локальным спутником F таким, что $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и $F(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}(F_p) \subseteq \mathfrak{F}$ для каждого $p \in \omega$.*

Отображение c называют операцией замыкания [2], если c сопоставляет каждому классу групп \mathfrak{K} класс групп $c\mathfrak{K}$ такой, что выполняются следующие условия:

- 1) $\mathfrak{K} \subseteq c\mathfrak{K}$;
- 2) $c(c\mathfrak{K}) \subseteq c\mathfrak{K}$;
- 3) если $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{K}_2$, то $c\mathfrak{K}_1 \subseteq c\mathfrak{K}_2$.

Класс \mathfrak{K} называется c -замкнутым, если $c\mathfrak{K} = \mathfrak{K}$.

Пусть \mathfrak{X} – непустая формация. Тогда через $S_{F\mathfrak{X}}$ обозначим операцию, которая сопоставляет каждой группе $G \in \mathfrak{X}$ класс групп $S_{F\mathfrak{X}}\mathfrak{K} = \{H: H \subseteq G \in \mathfrak{K} \text{ и } H^{\mathfrak{X}} \triangleleft \triangleleft G\}$. Напомним, что формацию \mathfrak{X} называют S -замкнутой или наследственной, если из того, что $G \in \mathfrak{X}$ и $H \leq G$ следует, что $H \in \mathfrak{X}$. Ранее нами было установлено свойство операции $S_{F\mathfrak{X}}$, которое представляет

Л е м м а 2 ([9, теорема 2.4]). *Если \mathfrak{X} – непустая наследственная формация, то операция $S_{F\mathfrak{X}}$ является операцией замыкания.*

Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ – классу всех nilпотентных групп, то операцию $S_{F\mathfrak{N}}$ обозначают коротко S_F . Операция S_F была определена Хоуксом [5], который показал, что классы Фишера – это в точности все те классы Фиттинга, которые S_F -замкнуты.

2. Характеризация ω -локальных формаций Фишера.

О п р е д е л е н и е 1. Класс групп \mathfrak{F} назовем *формацией Фишера*, если он является одновременно формацией и классом Фишера.

О п р е д е л е н и е 2. Формацию Фишера назовем *ω -локальной* (в частности локальной), если \mathfrak{F} является ω -локальной (соответственно локальной) формацией.

Заметим, что семейство ω -локальных формаций Фишера обширно. Действительно, каждый разрешимый наследственный класс Фиттинга \mathfrak{F} по теореме Брайса, Косси [6] является локальной формацией. Кроме того, очевидно, что в этом случае \mathfrak{F} – класс Фишера и, значит, \mathfrak{F} – формация Фишера. Однако не всякая наследственная локальная формация является формацией Фишера. Это подтверждает следующий

П р и м е р 1. Пусть \mathfrak{U} – формация всех сверхразрешимых групп. Тогда $\mathfrak{U} = LF(f)$ (см. [1, глава 4, пример 9]) для локального спутника f такого, что для всех $p \in \mathbb{P}$ имеет место $f(p) = \mathfrak{U}(p-1)$, где $\mathfrak{U}(p-1)$ – формация всех абелевых групп экспоненты делящей $p-1$.

Пусть $X = Z_5 \times Z_5$ и $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ – матрицы над полем Галуа $GF(5)$.

Тогда группа $Q = \langle A_1, B_1 \rangle \cong Q_8$.

Пусть $XG = [X]Q$. Тогда, как показано Менсом (см. 1.3[10]), $G = AB$, где $A = \langle X, A_1 \rangle$, $B = \langle X, B_1 \rangle$ являются нормальными \mathcal{U} -подгруппами группы G и $G \notin \mathcal{U}$. Следовательно, класс \mathcal{U} локальная формация, которая не является классом Фишера.

Основной результат настоящего раздела – характеристика ω -локальных формаций Фишера посредством заданных свойств ее ω -локальных спутников. Предварительно приведем в качестве леммы свойства классов Фишера, которые в дальнейшем мы будем использовать.

Л е м м а 3. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *если $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – множество классов Фишера, то их пересечение $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ является классом Фишера;*

2) *если \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – классы Фишера, то их произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ является классом Фишера.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение 1) следует непосредственно по определению класса Фишера. Справедливость утверждения 2) вытекает из [11, теорема 3.1]. Лемма доказана.

Т е о р е м а 1. *Пусть $\emptyset \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$ и \mathfrak{F} – ω -локальная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если f – ω -локальный спутник \mathfrak{F} такой, что $f(a)$ – формация Фишера для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$, то \mathfrak{F} – формация Фишера;*

2) *\mathfrak{F} является формацией Фишера тогда и только тогда, когда все значения ее канонического ω -локального спутника – формации Фишера.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем утверждение 1). Пусть все значения ω -локального спутника f формации \mathfrak{F} являются классами Фишера. Покажем, что \mathfrak{F} в этом случае также класс Фишера. Так как формация \mathfrak{F} – ω -локальна, то по [8, теорема 2], используя формулу ω -локальной формации [7] получаем, что $\mathfrak{F} = \left(\bigcap_{p \in \pi_2} \mathfrak{C}_p \right) \cap \left(\bigcap_{p \in \pi_1} \mathfrak{C}_p \mathfrak{N}_p f(p) \right) \cap (\mathfrak{C}_\omega f(\omega'))$, где $\pi_1 = \text{Supp}(f) \cap \omega$ и $\pi_2 = \omega / \pi_1$. Заметим, что фиттингова формация \mathfrak{C}_p является наследственной и поэтому \mathfrak{C}_p – формация Фишера. Следовательно, по лемме 3 (1) $\bigcap_{p \in \pi_2} \mathfrak{C}_p$ – формация Фишера. Пусть, $p \in \pi_1$. Рассмотрим теперь про-

изведение классов $\mathfrak{C}_p \mathfrak{N}_p f(p)$. Так как каждый из множителей \mathfrak{C}_p , \mathfrak{N}_p и $f(p)$ – класс Фишера, то по лемме 3 (2) следует, что произведение $\mathfrak{C}_p \mathfrak{N}_p f(p)$ является классом Фишера. Аналогично заключаем, что произведение $\mathfrak{C}_\omega f(\omega')$ – класс Фишера. Теперь из того, что по лемме 3 (1) пересечение любого множества классов Фишера снова является классом Фишера, заключаем, что \mathfrak{F} является формацией Фишера. Утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2). Если все значения канонического ω -локального спутника F формации \mathfrak{F} являются классами Фишера, то \mathfrak{F} – формация Фишера по утверждению 1).

Покажем справедливость обратного утверждения. Пусть \mathfrak{F} – ω -локальная формация Фишера с каноническим ω -локальным спутником F , т. е. $\mathfrak{F} = LF_\omega(F)$. По лемме 2.1 $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и $F(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}(F_p)$ для всех $p \in \omega$. Покажем, что все значения ω -локального спутника F являются классами Фишера.

Если $\omega = \mathbb{P}$, то \mathfrak{F} – локальная формация и утверждение верно согласно [2, IX, теорема 3.6 (b)]. Пусть $\omega \subset \mathbb{P}$. Проверим, что в этом случае $F(a)$ класс Фишера для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Если $a = \omega'$, то $F(\omega') = \mathfrak{F}$ – класс Фишера по условию. Поэтому остается показать, что $F(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}(F_p)$ – класс Фишера для всех $p \in \omega$. Если $p \in \omega \setminus \sigma(\mathfrak{F})$, то $F(p) = \emptyset$ и утверждение очевидно. Пусть $p \in \omega \cap \sigma(\mathfrak{F})$. В этом случае $\mathfrak{F}(F_p) \neq \emptyset$ и поэтому $F(p) \neq \emptyset$.

Пусть $G \in F(p)$ и $K \triangleleft G$, $K \leq H \leq G$. Предположим, что H/K – q -группа для некоторого простого q . Докажем, что $H \in F(p)$. Рассмотрим регулярное сплетение $W = Z_p \text{wr} G$. Тогда $W = [Z_p^*]G$, где Z_p^* – базисная группа W . Отсюда следует, что $W/Z_p^* \cong G$. Но $G \in F(p)$. Следовательно, $W \in \mathfrak{N}_p F(p)$. Так как F – канонический ω -локальный спутник \mathfrak{F} , то $\mathfrak{N}_p F(p) = F(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $W \in \mathfrak{F}$. Ввиду того, что $K \triangleleft G$ и $Z_p^* \triangleleft W$, следует, что $Z_p^* K \triangleleft W$. Действительно, пусть $x = zg \in W$, где

$z \in Z_p^*$ и $g \in G$. Тогда $x^{-1}Z_p^*Kx = g^{-1}z^{-1}Z_p^*Kzg$. Отсюда следует, что $g^{-1}Z_p^*Kzg = g^{-1}KZ_p^*g$ и поэтому $x^{-1}Z_p^*Kx = g^{-1}KgZ_p^* = KZ_p^*$. Так как $Z_p^*K \leq Z_p^*H$, то $Z_p^*K \triangleleft HZ_p^*$. Тогда, используя изоморфизмы $(HZ_p^*)/(KZ_p^*) = (HKZ_p^*)/(KZ_p^*) \cong H/(H \cap KZ_p^*)$ и $(H/K)/(H \cap KZ_p^*/K) \cong H/(H \cap KZ_p^*)$, заключаем, что $H/(H \cap KZ_p^*)$ является q -группой. Итак, $W \in \mathfrak{F}$, $KZ_p^* \triangleleft W$, $KZ_p^* \leq HZ_p^* \leq W$ и $(HZ_p^*)/(KZ_p^*)$ q -группа. Поскольку по условию \mathfrak{F} является классом Фишера, то $HZ_p^* \in \mathfrak{F}$. Теперь ввиду того, что формация \mathfrak{F} является ω -локальной и ее ω -локальный спутник F канонический, получаем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{C}_p, F(p)$. Следовательно, $HZ_p^* \in \mathfrak{C}_p, F(p)$. Но по [2, А, лемма 18.8 (а)] $Z_p^*H \cong Z_p^{G:H} \text{ wr } H = W_1$. Значит, $W_1 = [Z_p^*]H$, где Z_p^* – базисная группа W_1 . Пусть $O_{p'}(W_1)$ – наибольшая нормальная p' -подгруппа группы W_1 . Так как базисная группа Z_p^* группы W_1 является p -группой, то $O_{p'}(W_1) \cap Z_p^* = 1$. Следовательно, по [2, лемма А, 18.8(b)] (см. также [12, I, раздел 5.4]) $O_{p'}(W_1) = 1$ и поэтому $O_{p'}(HZ_p^*) = 1$. Но тогда из $HZ_p^* \in \mathfrak{C}_p, F(p)$ следует, что $HZ_p^* = HZ_p^*/O_{p'}(HZ_p^*) \in F(p)$. Итак, $HZ_p^* \in F(p)$. Следовательно, $HZ_p^*/Z_p^* \cong H/H \cap Z_p^* = H \in F(p)$ и поэтому $F(p)$ класс Фишера. Теорема доказана.

В случае, когда $\omega = \mathbb{P}$, получаем

С л е д с т в и е 1 [2, теорема IX.1.6(b)]. Локальная формация \mathfrak{F} является классом Фишера тогда и только тогда, когда все значения ее канонического локального спутника являются классами Фишера.

3. \mathfrak{N}^k -классы Фишера и максимальные подгруппы. В настоящем разделе будем предполагать, что все рассматриваемые группы разрешимы. Основным результатом раздела описание \mathfrak{X} -классов Фишера, в частности, классов Фишера в случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}^k$ – формация Фишера всех групп нильпотентной длины $\leq k$.

Следуя [11], введем

О п р е д е л е н и е 3. Пусть \mathfrak{N}^k – формация всех групп нильпотентной длины $\leq k$. Класс Фиттинга \mathfrak{F} назовем \mathfrak{N}^k -классом Фишера, если из того, что $G \in \mathfrak{F}$, $K \triangleleft G$, $K \leq H \leq G$ и $H/K \in \mathfrak{N}^k$ всегда следует, что $H \in \mathfrak{F}$.

Заметим, что если $k = 1$, то \mathfrak{F} является классом Фишера [4] (см. также определение [2, IX, определение 3.3 (а)]).

Пусть $S_{F\mathfrak{N}^k}$ – операция, сопоставляющая каждому классу групп \mathfrak{X} класс $S_{F\mathfrak{N}^k}\mathfrak{X} = (H : H \leq G \in \mathfrak{X} \text{ и } H\mathfrak{N}^k \triangleleft \triangleleft G)$. Тогда ввиду того, что формация \mathfrak{N}^k наследственна, по лемме 2 следует, что $S_{F\mathfrak{N}^k}$ является операцией замыкания.

Для доказательства основного результата мы будем использовать две леммы, первая из которых представляет простейшие свойства корадикалов групп.

Л е м м а 3. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – непустые формации. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если формация \mathfrak{F} – наследственна и $H \leq G$, то $H^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$.

2) включение $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ выполняется тогда и только тогда, когда $G^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{H}}$ для любой группы G .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так $G/G^{\mathfrak{F}}$ является \mathfrak{F} -группой и $HG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \leq G/G^{\mathfrak{F}}$, то $HG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Тогда ввиду изоморфизма $HG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cong H/(H \cap G^{\mathfrak{F}})$, получаем, что $H/(H \cap G^{\mathfrak{F}})$ является \mathfrak{F} -группой. Отсюда следует, что $H^{\mathfrak{F}} \leq H \cap G^{\mathfrak{F}}$ и $H^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$.

Докажем утверждение 2). Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Тогда, очевидно, $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}$ и $G^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{H}}$ для любой группы G . Обратно, пусть для любой группы G выполняется включение $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{H}}$. Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} = 1$ и тогда $G^{\mathfrak{H}} = 1$. А это означает, что $G \in \mathfrak{H}$. Лемма доказана.

Л е м м а 4. Если нормальная подгруппа K группы G и ее максимальная подгруппа M таковы, что $G = MK$ и $M \cap K \subset N_K(M \cap K)$, то $M \cap K$ нормальная подгруппа G .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $K \triangleleft G$ и $M \triangleleft G$. Тогда по [2, А, теорема 2.1 (b)] подгруппа $M \cap K \triangleleft M$. Следовательно,

$$M \leq N_G(M \cap K) \quad (*)$$

Так как по условию $M \cap K \subset N_K(M \cap K)$, то существуют такие элементы $k \in N_K(M \cap K)$, которые не принадлежат подгруппе $M \cap K$. Но $N_K(M \cap K) \leq N_G(M \cap K)$, и поэтому $k \in N_G(M \cap K)$ и $k \in K \setminus M$.

Следовательно, ввиду (*) $M < N_G(M \cap K) \leq G$. Но $M < G$. Значит, $N_G(M \cap K) = G$ и поэтому $M \cap K \triangleleft G$. Лемма доказана.

С л е д с т в и е 2. Если K нильпотентная нормальная подгруппа группы G и ее максимальная подгруппа M таковы, что $G = MK$, то подгруппа $M \cap K$ нормальна в G .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как подгруппа K – нильпотентна, то [1, А, теорема 8.3 (с)] следует, что $K \cap M < N_K(M \cap K)$ и по лемме 4 $K \cap M \triangleleft G$.

Т е о р е м а 2. Класс групп \mathfrak{X} является $S_{F\mathfrak{N}}^k$ -замкнутым тогда и только тогда, когда для любой неединичной \mathfrak{X} -группы G и ее максимальной подгруппы M такой, что $G^{\mathfrak{N}^{k+1}} \leq M$ всегда следует, что M является \mathfrak{X} -группой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть класс групп \mathfrak{X} является $S_{F\mathfrak{N}}^k$ -замкнутым и группа $1 \neq G \in \mathfrak{X}$ такова, что $G^{\mathfrak{N}^{k+1}} \leq M < G$. Докажем, что $M \in \mathfrak{X}$. Рассмотрим два следующих случая.

Случай 1. Максимальная подгруппа M нормальна в G .

Так как $M^{\mathfrak{N}^k} \triangleleft M \triangleleft G$, то $M^{\mathfrak{N}^k} \triangleleft \triangleleft G$. Таким образом, $M \leq G \in \mathfrak{X}$ и $M^{\mathfrak{N}^k} \triangleleft \triangleleft G$. Следовательно, $M \in S_{F\mathfrak{N}}^k \mathfrak{X}$. Но по условию $S_{F\mathfrak{N}}^k \mathfrak{X} = \mathfrak{X}$. Следовательно, $M \in \mathfrak{X}$ и в случае 1 утверждение доказано. Рассмотрим

Случай 2. Подгруппа M ненормальна в G .

Предположим, что $G^{\mathfrak{N}^k} \triangleleft M$. Тогда ввиду $M^{\mathfrak{N}^k} \triangleleft \triangleleft G$, как и в случае 1, следует $M \in \mathfrak{X}$.

Если $G^{\mathfrak{N}^k}$ не является подгруппой группы M , то $M < MG^{\mathfrak{N}^k} \leq G$. Но M – максимальная подгруппа G и поэтому, $MG^{\mathfrak{N}^k} = G$.

Пусть $\bar{X} = G/G^{\mathfrak{N}^k}$. Так как $\mathfrak{N}^k \subseteq \mathfrak{N}^{k+1}$, то по лемме 3.2 (2) $G^{\mathfrak{N}^{k+1}} \leq G^{\mathfrak{N}^k}$. Ввиду того, что $G^{\mathfrak{N}^{k+1}} \triangleleft G$ и $G^{\mathfrak{N}^{k+1}} \leq G^{\mathfrak{N}^k}$ следует, что $G^{\mathfrak{N}^{k+1}} \triangleleft G^{\mathfrak{N}^k}$. Пусть $\bar{K} = G^{\mathfrak{N}^k}/G^{\mathfrak{N}^{k+1}}$. Заметим, что по условию $G^{\mathfrak{N}^{k+1}} \triangleleft M$. Тогда $\bar{M} = M/G^{\mathfrak{N}^{k+1}}$, и поэтому $\bar{M}\bar{K} = MG^{\mathfrak{N}^{k+1}}/G^{\mathfrak{N}^{k+1}} = \bar{G}$. Итак, мы имеем, что $\bar{K} \triangleleft \bar{G}$, $\bar{M} < \bar{G}$ и $\bar{G} = \bar{M}\bar{K}$. Покажем, что \bar{K} нильпотентная подгруппа \bar{G} .

Так как $\bar{G} = G/G^{\mathfrak{N}^{k+1}} \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}^k$, то $\bar{G}^{\mathfrak{N}^k} = (G/G^{\mathfrak{N}^{k+1}})^{\mathfrak{N}^k} \in \mathfrak{N}$. Но $G^{\mathfrak{N}^{k+1}} \triangleleft G^{\mathfrak{N}^k}$. Следовательно, по [1, лемма 1.2 (1)] $(G/G^{\mathfrak{N}^{k+1}})^{\mathfrak{N}^k} = G^{\mathfrak{N}^k}G^{\mathfrak{N}^{k+1}}/G^{\mathfrak{N}^{k+1}}$. Значит, $G^{\mathfrak{N}^k}G^{\mathfrak{N}^{k+1}}/G^{\mathfrak{N}^k} = G^{\mathfrak{N}^k}/G^{\mathfrak{N}^{k+1}} = \bar{G}^{\mathfrak{N}^k} = \bar{K}$ и подгруппа \bar{K} нильпотентна. Таким образом, выполняются все условия следствия 3.4. Значит, $\bar{M} \cap \bar{K} \triangleleft \bar{G}$. Отсюда следует, что $M \cap G^{\mathfrak{N}^k} \triangleleft G$. Так как $M < G$ и формация \mathfrak{N}^k наследственна, то по лемме 3 (1) следует, что $M^{\mathfrak{N}^k} \leq G^{\mathfrak{N}^k}$. Значит, $M^{\mathfrak{N}^k} \leq M \cap G^{\mathfrak{N}^k} \leq M$. Так как $M^{\mathfrak{N}^k} \triangleleft M$, то $M^{\mathfrak{N}^k} \triangleleft M \cap G^{\mathfrak{N}^k}$. Следовательно, $M^{\mathfrak{N}^k} \triangleleft M \cap G^{\mathfrak{N}^k} \triangleleft G$ и $M^{\mathfrak{N}^k} \triangleleft \triangleleft G$. Итак, $M < G \in \mathfrak{X}$ и $M^{\mathfrak{N}^k} \triangleleft \triangleleft G$. Следовательно, $M \in S_{F\mathfrak{N}}^k \mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ и в случае 2 утверждение доказано.

Докажем обратное утверждение. Пусть из условия $1 \neq G \in \mathfrak{X}$, $M < G$ и $G^{\mathfrak{N}^{k+1}} \leq M$ следует, что M является \mathfrak{X} -группой. Покажем, что класс \mathfrak{X} является $S_{F\mathfrak{N}}^k$ -замкнутым. Так как по лемме 2.2 $S_{F\mathfrak{N}}^k$ – операция замыкания, то $\mathfrak{X} \subseteq S_{F\mathfrak{N}}^k \mathfrak{X}$. Докажем обратное включение: $S_{F\mathfrak{N}}^k \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$.

Предположим, что класс \mathfrak{X} не $S_{F\mathfrak{N}}^k$ -замкнут, то есть существуют группы X , такие, что класс $S_{F\mathfrak{N}}^k(X)$ не является подклассом класса \mathfrak{X} . Выберем среди таких групп группу G минимального порядка. Это означает, что найдется подгруппа $H \neq 1$ такая, что $H \leq G \in \mathfrak{X}$ и $H^{\mathfrak{N}^k} \triangleleft \triangleleft G$ и $H \notin \mathfrak{X}$.

Тогда для всех групп L таких, что $|L| < |G|$, справедливо $S_{F\mathfrak{N}}^k(L) \subseteq \mathfrak{X}$. Это означает, что если $Y \leq L \in \mathfrak{X}$ и $Y^{\mathfrak{N}^k} \triangleleft \triangleleft L$ то $Y \in \mathfrak{X}$.

Пусть $HG^{\mathfrak{N}^{k+1}} = G$. Так как $\mathfrak{N}^k \subseteq \mathfrak{N}^{k+1}$, то по лемме 3 (2) $G^{\mathfrak{N}^{k+1}} \leq G^{\mathfrak{N}^k}$. Теперь, применяя [1, лемма 1.2 (3)], из того, что $G = HG^{\mathfrak{N}^{k+1}}$ получаем, что $G^{\mathfrak{N}^k} = HG^{\mathfrak{N}^{k+1}}$. Так как по условию по условию $H^{\mathfrak{N}^k} \triangleleft \triangleleft G$ и $H^{\mathfrak{N}^k} \leq G^{\mathfrak{N}^k}$, то $H^{\mathfrak{N}^k} \triangleleft \triangleleft G^{\mathfrak{N}^k}$. Пусть \mathfrak{Q} – формация всех абелевых групп. Так как $\mathfrak{Q}\mathfrak{N}^k \subseteq \mathfrak{N}^{k+1}$, то по лемме 3 (2) $G^{\mathfrak{N}^{k+1}} \leq G^{\mathfrak{Q}\mathfrak{N}^k}$. Поэтому из равенства $G^{\mathfrak{N}^k} = H^{\mathfrak{N}^k}G^{\mathfrak{N}^{k+1}}$ выте-

кает, что $G^{\mathfrak{N}^k} = H^{\mathfrak{N}^k} G^{\mathfrak{N}^k}$. По [2, IV, теорема.1.8 (b)] справедливо равенство $G^{\mathfrak{N}^k} = (G^{\mathfrak{N}^k})^{\mathfrak{N}^k}$. Следовательно, $G^{\mathfrak{N}^k} = H^{\mathfrak{N}^k} (G^{\mathfrak{N}^k})^{\mathfrak{N}^k}$.

Если, $H^{\mathfrak{N}^k} < G^{\mathfrak{N}^k}$, то из того, что $H^{\mathfrak{N}^k} \triangleleft \triangleleft G^{\mathfrak{N}^k}$ следует, что существует собственная нормальная подгруппа H_1 группы $G^{\mathfrak{N}^k}$ такая, что $H_1(G^{\mathfrak{N}^k})^{\mathfrak{N}^k} = G^{\mathfrak{N}^k}$. Это, ввиду разрешимости группы $G^{\mathfrak{N}^k}$, противоречит тому, что по [1, лемма 1.2(1)] (см. также [13, теорема 13.24]) в $G^{\mathfrak{N}^k}$ не существует собственных нормальных подгрупп с указанным свойством.

Остается признать, что $H^{\mathfrak{N}^k} = G^{\mathfrak{N}^k}$. Тогда $H = HH^{\mathfrak{N}^k} = HG^{\mathfrak{N}^k} \geq HG^{\mathfrak{N}^{k+1}} = G$. Но $G \in \mathfrak{X}$ и поэтому $H \in \mathfrak{X}$. Получили противоречие с тем, что H не является \mathfrak{X} -группой.

Предположим теперь, что $HG^{\mathfrak{N}^k} \neq G$.

Тогда $G^{\mathfrak{N}^{k+1}} \leq HG^{\mathfrak{N}^{k+1}} \leq M < G$. Так как $G^{\mathfrak{N}^{k+1}} \leq M < G$ и $G \in \mathfrak{X}$, то $M \in \mathfrak{X}$. Итак, $H \leq M \in \mathfrak{X}$ и $H^{\mathfrak{N}^k} \triangleleft \triangleleft M$. Так как $|M| < |G|$, то по индукции $H \in \mathfrak{X}$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 3. *Класс Фиттинга \mathfrak{F} является \mathfrak{N}^k -классом Фишера тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:*

если $1 \neq G \in \mathfrak{F}$, $M < G$ и $G^{\mathfrak{N}^{k+1}} \leq M$, то $M \in \mathfrak{F}$.

С л е д с т в и е 4. [4] *Класс групп \mathfrak{X} является S_F -замкнутым в точности тогда, когда из того, что G неединичная \mathfrak{F} -группа и M ее максимальная подгруппа, содержащая нильпотентный корадикал G следует, что M является \mathfrak{F} -группой.*

В случае, когда $k = 1$ из [9, теоремы 3.5 и 3.1] получаем

С л е д с т в и е 5. *Класс Фиттинга \mathfrak{F} является классом Фишера тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:*

если $1 \neq G \in \mathfrak{F}$, $M < G$ и $G^{\mathfrak{N}^2} \leq M$, то $M \in \mathfrak{F}$.

Литература

1. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М., 1978.
2. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New York, 1992.
3. Fischer B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen. Habilitationsschrift. Universität Frankfurt (M), 1966.
4. Hartley B. // Proc. London Math. Soc. 1969. Vol. 3, N 2. P. 193–207.
5. Hawkes T. O. // Proc. Math. Cambridge Philos. Soc. 80. P. 437–446.
6. Bryce R. A., Cossey J. // Math. Z. 1972. Bd. 127, N 3. S. 217–223.
7. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. // Матем. труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.
8. Ведерников В. А., Сорокина М. М. // Матем. заметки. 2002. Т. 71, № 1. С. 43–60.
9. Залеская Е. Н., Воробьев С. Н. // Известия Гомельского государственного университета. 2010. № 3(60). С. 202–205.
10. Ment M. Eine Familie von Fitting Klassen endlicher uberauflösbarer Gruppen. Dissertation zur Erlangung des naturwissenschaftlichen Doktorgrades Universität Wuzburg, 1992/
11. Залеская Е. Н., Воробьев С. Н. // Весник ВДУ імя П. М. Машерова. 2008. № 3. С. 101–105.
12. Guo W. The theory of classes of groups. Beijing-New York; Dordrecht; Boston; London, 2000.
13. Белоногов В. А. Задачник по теории групп. М., 2000.

S. N. VOROBYOV

FISCHER'S FORMATIONS OF FINITE GROUPS

Summary

It is proved that an ω -local formation \mathfrak{F} is a Fischer class if and only if all values of the canonical ω -local satellite of \mathfrak{F} are Fischer classes.

We define \mathfrak{N}^k -Fischer classes, where \mathfrak{N}^k is a local Fischer formation of all groups of the nilpotent length $\leq k$. It was described \mathfrak{N}^k -Fischer classes by maximal subgroups and \mathfrak{N}^{k+1} -residuals of groups.

УДК 512.542

А. П. МЕХОВИЧ

**ПРЯМЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ τ -ЗАМКНУТЫХ n -КРАТНО
 ω -КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ**

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова

(Поступила в редакцию 16.12.2011)

Введение. Все рассматриваемые в данной работе группы предполагаются конечными. Пусть $\{\mathfrak{F}_i / i \in I\}$ – произвольная система непустых классов групп такая, что для любых двух различных $i, j \in I$ имеет место $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$. Следуя [1], через $\bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ мы обозначаем класс всех групп вида $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}$, ..., $A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, i_2, \dots, i_t \in I$. В частности, если $I = \{1, 2, \dots, t\}$, то пишем $\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2 \otimes \dots \otimes \mathfrak{F}_t$.

О п р е д е л е н и е. Пусть L – решетка классов групп и $\mathfrak{F} \in L$. Класс \mathfrak{F} назовем *прямо разложимым* в решетке L , если $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, где все классы $\mathfrak{F}_i \in L$. В противном случае, \mathfrak{F} называется *прямо неразложимым* в решетке L .

Заметим, что впервые конструкция прямого разложения классов групп возникла в работе [2]. В неявном виде такая конструкция использовалась в [3] (см. также [4, с. 670]). Прямые разложения классов групп оказались полезными при решении ряда открытых вопросов теории групп и при построении формаций с различными заданными свойствами. Здесь мы лишь коротко отметим работы [5, 6], где на основе условия ортогональности классов групп было дано решение известной проблемы Кегеля–Шеметкова об описании всех насыщенных наследственных формаций \mathfrak{F} , для которых множество всех \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп каждой конечной группы образует подрешетку решетки всех подгрупп группы и книгу А. Н. Скибы [1], где прямые разложения классов групп нашли применение при решении многих открытых задач теории формаций конечных групп.

В работе [3] (см. также [1, теорема 4.3.8]) доказано, что $\bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ является n -кратно насыщенной формацией тогда и только тогда, когда все \mathfrak{F}_i – n -кратно насыщенные формации. Аналог этого результата справедлив для n -кратно ω -насыщенных формаций (см. [7]). Однако, как показывает пример, построенный в работе [8] (см. также [9] и [1, замечание 4.3.10]), аналогичный результат для τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций неверен. Вместе с тем справедлива теорема, доказательство которой является целью данной работы.

Т е о р е м а. Пусть $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций \mathfrak{F}_i таких, что $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \emptyset$ для всех различных $i, j \in I$. Тогда формация \mathfrak{F} τ -замкнута n -кратно ω -композиционна в том и только в том случае, когда τ -замкнута n -кратно ω -композиционна каждая из формаций \mathfrak{F}_i .

Используется стандартная терминология [1, 4, 10, 11], а также определения и обозначения, введенные в работе [12].

1. Предварительные сведения. Напомним, что *формацией* называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. В дальнейшем символ ω обозначает некоторое непустое множество простых чисел, $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. Через $\pi(G)$ обо-

значено множество всех различных простых делителей порядка группы G , $\pi(\mathfrak{X})$ – объединение множеств $\pi(G)$ для всех групп G из совокупности групп \mathfrak{X} . Для произвольного класса групп $\mathfrak{F} \supseteq (1)$ символ G^δ обозначает пересечение всех таких нормальных подгрупп N , что $G/N \in \mathfrak{F}$. Неединичная группа называется *монолитической*, если она имеет единственную минимальную нормальную подгруппу. Символами $S_\omega(G)$, $C^p(G)$, $O_p(G)$ обозначаются соответственно наибольшая нормальная разрешимая ω -подгруппа группы G , пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G , у которых композиционные факторы имеют простой порядок p (если в группе G нет таких факторов, то полагают $C^p(G) = G$) и наибольшая нормальная p -подгруппа группы G . Через $\text{Com}^+(\mathfrak{X})$ обозначают класс всех простых абелевых групп A таких, что $A \simeq H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K группы $G \in \mathfrak{X}$.

Функции $f: \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ сопоставляют класс групп

$$CF_\omega(f) = (G \mid G/S_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/C^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(\text{Com}^+(G))).$$

Если формация \mathfrak{F} такова, что $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, то \mathfrak{F} называется ω -композиционной формацией с ω -композиционным спутником f [12]. Если $\omega = \mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, то символ ω опускают. ω -Композиционный спутник f формации \mathfrak{F} называется *внутренним*, если каждое его значение является подформацией в \mathfrak{F} . Полагают $f \leq h$, если $f(a) \subseteq h(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Нам необходимо следующее, предложенное А. Н. Скибой [1], определение: пусть со всякой группой G сопоставлена некоторая система ее подгрупп $\tau(G)$. Говорят, что τ – *подгрупповой функтор*, если выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G ;

2) для любого эпиморфизма $\varphi: A \rightarrow B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Если $\tau(G) = \{G\}$, то подгрупповой функтор τ называется *тривиальным*. Формация \mathfrak{F} называется τ -замкнутой [1], если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой ее группы G . Мы будем рассматривать лишь такие подгрупповые функторы τ , что для любой группы G все подгруппы, входящие в $\tau(G)$, субнормальны в G .

Всякая формация считается 0 -кратно ω -композиционной. При $n \geq 1$ формация \mathfrak{F} называется n -кратно ω -композиционной, если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где все непустые значения спутника f являются $(n-1)$ -кратно ω -композиционными формациями. Если формация \mathfrak{F} n -кратно ω -композиционна для всех натуральных n , то \mathfrak{F} называется *тотально ω -композиционной*.

Символом $c_{\omega_n}^\tau$ обозначается решетка всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций. Заметим, что если τ – тривиальный подгрупповой функтор, то $c_{\omega_n}^\tau = c_n^\omega$. Напомним, что спутник f называется $c_{\omega_n}^\tau$ -значным, если каждое его непустое значение принадлежит решетке $c_{\omega_n}^\tau$.

Доказательству теоремы предположим несколько лемм.

Л е м м а 1 [12, лемма 4]. Если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ и $G/O_p(G) \in f(p) \cap \mathfrak{F}$ для некоторого $p \in \omega$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Л е м м а 2 [10, лемма 4.4]. Пусть $K \subseteq N \triangleleft G$, $K \triangleleft G$, $K \subseteq \Phi(G)$. Тогда если N/K π -замкнута, то и N π -замкнута.

Л е м м а 3 [13, лемма 4.1]. Пусть \mathfrak{F} – ω -композиционная формация. Тогда, если \mathfrak{F} имеет внутренний τ -значный ω -композиционный спутник, то \mathfrak{F} – τ -замкнутая формация.

2. Основной результат.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть \mathfrak{F}_i – τ -замкнутая n -кратно ω -композиционная формация для любого $i \in I$. По лемме 5 [12] формация \mathfrak{F}_i обладает минимальным $c_{\omega_{n-1}}^\tau$ -значным ω -композиционным спутником f_i . Построим ω -композиционный спутник f таким образом, что

$$f(a) = \begin{cases} f_i(a), & \text{если } a = p \in \pi_i \cup \{\omega'\} \text{ для некоторого } i \in I, \\ \emptyset, & \text{если } a = p \in \omega \setminus \bigcup_{i \in I} \pi_i, \end{cases}$$

где $\pi_i = \omega \cap \pi(\text{Com}^+(\mathfrak{F}_i))$. Индукцией по n покажем, что \mathfrak{F} – τ -замкнутая n -кратно ω -композиционная формация.

При $n = 0$ утверждение очевидно. Рассмотрим случай, когда $n = 1$.

Предположим, что $CF_\omega(f) \not\subseteq \mathfrak{F}$, и пусть G – группа минимального порядка из $CF_\omega(f) \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G – монолитическая группа с цоколем $R = G^\mathfrak{F}$. Поскольку $G \in CF_\omega(f)$, то $G/S_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/C^p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\text{Com}^+(G))$. Следовательно, если $p \in \omega \cap \pi(\text{Com}^+(G))$, то по построению ω -композиционного спутника f имеем $f(p) \neq \emptyset$. Последнее означает, что $p \in \pi_i$. Значит, $\omega \cap \pi(\text{Com}^+(G)) \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} \pi_i\right) \cup \{\omega'\}$. Если $\omega \cap \pi(\text{Com}^+(R)) = \emptyset$, то $S_\omega(G) = 1$. Поэтому

$$G \simeq G/S_\omega(G) \in f(\omega') = f_i(\omega') \subseteq \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F},$$

что противоречит выбору группы G . Следовательно, $\omega \cap \pi(\text{Com}^+(R)) \neq \emptyset$. Значит, R – p -группа, где $p \in \omega \cap \pi(\text{Com}^+(R))$. Пусть $R \not\subseteq \Phi(G)$. Тогда $R = C_G(R) = C^p(G) = O_p(G)$. Отсюда

$$G/C^p(G) = G/O_p(G) \in f(p).$$

Пусть $p \in \pi_j$ для некоторого $j \in I$. Тогда $f(p) = f_j(p)$ и $G/O_p(G) \in f_j(p)$. Следовательно, по лемме 1 $G \in \mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{F}$, противоречие. Таким образом, $R \subseteq \Phi(G)$. Ввиду выбора группы G имеем $G/R \in \mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Значит, найдутся такие $i_1, i_2, \dots, i_t \in I$, что $G/R = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}$, \dots , $A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$. Группа G/R является π -разложимой, где $\pi = \pi(A_j)$ для некоторого $j \in \{1, 2, \dots, t\}$. Следовательно, по лемме 2 сама группа G является π -разложимой. Поэтому $G = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_j \times \dots \times B_t$, где B_j – холлова π -подгруппа группы G , B_i – холлова π' -подгруппа группы G для всех $i \in \{1, 2, \dots, t\} \setminus j$. Ввиду выбора группы G имеем $G/B_k \in \mathfrak{F}$ для всех $k \in \{1, 2, \dots, t\}$. Значит, $G \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие показывает, что $CF_\omega(f) \subseteq \mathfrak{F}$.

Предположим, что $\mathfrak{F} \not\subseteq CF_\omega(f)$, и пусть G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus CF_\omega(f)$. Тогда G – монолитическая группа. Ввиду монолитичности группы G найдется такое $i \in I$, что $G \in \mathfrak{F}_i = CF_\omega(f_i)$. Значит,

$$G/C^p(G) \in f_i(p) = f(p)$$

для всех $p \in \pi_i$ и

$$G/S_\omega(G) \in f_i(\omega') = f(\omega').$$

Следовательно, $G \in CF_\omega(f)$, что противоречит выбору группы G . Таким образом, $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$. Ввиду леммы 3 \mathfrak{F} – τ -замкнутая ω -композиционная формация.

Пусть $n > 1$ и при $n - 1$ формация \mathfrak{F} τ -замкнута $(n - 1)$ -кратно ω -композиционна. По построению ω -композиционного спутника f и по индукции ω -композиционный спутник $f c_{\omega_{n-1}}^\tau$ -значен. Поэтому \mathfrak{F} – τ -замкнутая n -кратно ω -композиционная формация.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть теперь формация \mathfrak{F} τ -замкнута n -кратно ω -композиционна. По лемме 5 [12] формация \mathfrak{F} обладает минимальным $c_{\omega_{n-1}}^\tau$ -значным ω -композиционным спутником f . Пусть $i \in I$ и f_i – такой ω -композиционный спутник, что

$$f_i(a) = \begin{cases} f(a), & \text{если } a = p \in \pi_i \cup \{\omega'\}, \\ \emptyset, & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi_i, \end{cases}$$

где $\pi_i = \omega \cap \pi(\text{Com}^+(\mathfrak{F}_i))$. Индукцией по n покажем, что \mathfrak{F}_i – τ -замкнутая n -кратно ω -композиционная формация.

При $n = 0$ утверждение очевидно. Рассмотрим случай, когда $n = 1$.

Предположим, что $CF_\omega(f_i) \not\subseteq \mathfrak{F}_i$, и G – группа минимального порядка из $CF_\omega(f_i) \setminus \mathfrak{F}_i$. Тогда G – монолитическая группа с цоколем $R = G^{\mathfrak{F}_i}$. Допустим, что $\omega \cap \pi(\text{Com}^+(R)) = \emptyset$. Тогда $S_\omega(G) = 1$. Ввиду выбора группы G имеем $G/R \in \mathfrak{F}_i$. Поэтому

$$(G/R) / S_\omega(G/R) = (G/R) / (S_\omega(G)/R) \simeq G/S_\omega(G) \simeq G \in \mathfrak{F}_i,$$

что противоречит выбору группы G . Следовательно, $\omega \cap \pi(\text{Com}^+(R)) \neq \emptyset$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(\text{Com}^+(R)) \subseteq \omega \cap \pi(\text{Com}^+(G))$. В таком случае из $G \in CF_\omega(f_i)$ следует, что $G/C^p(G) \in f_i(p)$. Значит, $f_i(p) \neq \emptyset$ и по построению ω -композиционного спутника f_i имеем $p \in \pi_i$. Итак, $\omega \cap \pi(\text{Com}^+(R)) \subseteq \pi_i$. Кроме того, по построению ω -композиционного спутника f_i справедливо $f_i \leq f$. Значит, $G \in \mathfrak{F}$, и ввиду монолитичности группы G найдется такое $j \in I$, что $G \in \mathfrak{F}_j$. Тогда $\omega \cap \pi(\text{Com}^+(R)) \subseteq \pi_j$, где $\pi_j = \omega \cap \pi(\text{Com}^+(\mathfrak{F}_j))$. Поэтому

$$\omega \cap \pi(\text{Com}^+(R)) \subseteq \pi_i \cap \pi_j = \emptyset.$$

Тем самым установлено, что $i = j$, т. е. $G \in \mathfrak{F}_i$. Полученное противоречие показывает, что $CF_\omega(f_i) \subseteq \mathfrak{F}_i$.

Пусть $\mathfrak{F}_i \not\subseteq CF_\omega(f_i)$, и G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_i \setminus CF_\omega(f_i)$. Тогда G – монолитическая группа с цоколем $R = G^{CF_\omega(f_i)}$. Поскольку

$$G \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F} = CF_\omega(f),$$

то для всех $p \in \omega \cap \pi(\text{Com}^+(G))$ имеет место

$$G/C^p(G) \in f(p) = f_i(p)$$

и

$$G/S_\omega(G) \in f(\omega) = f_i(\omega).$$

Следовательно, $G \in CF_\omega(f_i)$, что противоречит выбору группы G . Таким образом, $\mathfrak{F}_i = CF_\omega(f_i)$. Ввиду леммы 3 \mathfrak{F}_i – τ -замкнутая ω -композиционная формация.

Пусть $n > 1$ и при $n - 1$ формация \mathfrak{F}_i τ -замкнута $(n - 1)$ -кратно композиционна. По построению ω -композиционного спутника f_i и по индукции ω -композиционный спутник f_i $c_{\omega, n-1}^\tau$ -значен. Поэтому \mathfrak{F}_i – τ -замкнутая n -кратно ω -композиционная формация. Теорема доказана.

3. Некоторые приложения. Отметим некоторые следствия, получаемые из основного результата.

Если τ – тривиальный подгрупповой функтор, то получим

С л е д с т в и е 1. Пусть $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций \mathfrak{F}_i таких, что $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \emptyset$ для

всех различных $i, j \in I$. Тогда формация \mathfrak{F} n -кратно ω -композиционна (тотально ω -композиционна) в том и только в том случае, когда n -кратно ω -композиционна (тотально ω -композиционна) каждая из формаций \mathfrak{F}_i .

В случае $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ справедливо

С л е д с т в и е 2 [8]. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{H}$ для некоторых формаций \mathfrak{M} и \mathfrak{H} таких, что $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \emptyset$. Тогда формация \mathfrak{F} n -кратно композиционна (тотально композиционна) в том и только в том случае, когда n -кратно композиционна (тотально композиционна) каждая из формаций \mathfrak{M} и \mathfrak{H} .

В случае $n = 1$ для тривиального подгруппового функтора τ справедливо

С л е д с т в и е 3. Пусть $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций \mathfrak{F}_i таких, что $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \emptyset$ для всех различных $i, j \in I$. Тогда \mathfrak{F} ω -композиционна в том и только в том случае, когда ω -композиционна каждая из формаций \mathfrak{F}_i .

Автор выражает искреннюю благодарность рецензенту за очень полезные замечания, способствовавшие значительному улучшению статьи.

Литература

1. Скиба А. Н. Алгебра формаций. Минск, 1997.
2. Каморников С. Ф. // Вопросы алгебры. 1986. Вып. 2. С. 80–86.
3. Скиба А. Н. // Вопросы алгебры. 1996. Вып. 9. С. 114–118.
4. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. De Gruyter Expo. Math., 4. Berlin-New York, 1992.
5. Ballester-Bolinches A., Doerk K., Pérez-Ramos M. D. // J. Algebra. 1992. Vol. 148, N 1. P. 42–52.
6. Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Семенчук В. Н. О решетках подгрупп конечных групп. Бесконечные группы и другие примыкающие алгебраические структуры: сб. ст. / Ин-т математики АН Украины; отв. ред. Н. С. Черников. Киев, 1993. С. 27–54.
7. Воробьев Н. Н., Мехович А. П. // Проблемы физики, математики и техники. 2011. № 1 (6). С. 48–51.
8. Близнец И. В., Воробьев Н. Н. // Вопросы алгебры. 1998. Вып. 12. С. 106–112.
9. Близнец И. В., Скиба А. Н. // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2011. № 4 (67). С. 45–48.
10. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М., 1978.
11. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Формации алгебраических систем. М., 1989.
12. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. // Украинский матем. журн. 2000. Т. 52, № 6. С. 783–797.
13. Белоус (Буякевич) Л. И. // Вестник Полоцкого государственного университета. 2006. № 4. С. 21–25.

A. P. MEKHOVICH

DIRECT DECOMPOSITIONS OF τ -CLOSED n -MULTIPLY ω -COMPOSITION FORMATIONS

Summary

Let $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ be a system of non-empty formations such that $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \emptyset$ for all distinct $i, j \in I$. Let $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ be a class of groups $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_r$, where $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}$, ..., $A_r \in \mathfrak{F}_{i_r}$ for some $i_1, i_2, \dots, i_r \in I$. It is proved that the formation \mathfrak{F} is a τ -closed n -multiply ω -composition if and only if every formation \mathfrak{F}_i is a τ -closed n -multiply ω -composition.

УДК 511.36

В. И. БЕРНИК¹, Ф. ГЁТЦЕ², Д. В. КОЛЕДА¹

ЭФФЕКТИВНЫЕ РЕГУЛЯРНЫЕ СИСТЕМЫ

¹Институт математики НАН Беларуси

²Университет г. Билефельда (Германия)

(Поступила в редакцию 23.03.2011)

Известно, что действительные алгебраические числа образуют регулярную систему на любом интервале $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

О п р е д е л е н и е 1. Счетное множество

$$G = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j, \dots\}$$

действительных чисел вместе с функцией $N(\gamma_j)$, $j = 1, 2, \dots$, образует *регулярную систему*, если при любом I существует действительное число $T_0(I)$ такое, что при

$$T > T_0(I) \quad (1)$$

найдутся t чисел $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t$ с условиями

- 1) $N(\gamma_i) \leq T$, $1 \leq i \leq t$;
- 2) $|\gamma_i - \gamma_j| \geq T^{-1}$, $i \neq j$;
- 3) $t > c_1 |b - a| T$.

Нетрудно доказать, что множество рациональных чисел p/q с функцией $N(p/q) = q^2$ образует регулярную систему. А. Бейкер и В. Шмидт [1] доказали, что множество действительных алгебраических чисел $G = \{\beta_1, \dots, \beta_s, \dots\}$ вместе с функцией

$$N(\beta_i) = H(\beta_i)^{n+1} \log^{-3n(n-1)} H(\beta_i), \quad i = 1, 2, \dots \quad (2)$$

также образует регулярную систему. В (2) величина $H(\beta_i)$ обозначает высоту алгебраического числа β_i . Это позволило им найти точную нижнюю оценку для размерности Хаусдорфа множества $\mathcal{L}_n(w)$ действительных чисел x , для которых неравенство

$$|P(x)| < H(P)^{-w}, \quad w \geq n \quad (3)$$

имеет бесконечное число решений в $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg P \leq n$. Эта оценка имеет вид

$$\dim \mathcal{L}_n(w) \geq \frac{n+1}{w+1}. \quad (4)$$

В. И. Берником показатель степени у логарифма в (2) был уменьшен до $-2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ [2], а В. В. Бересневич [3] доказал регулярность множества действительных алгебраических чисел при $N(\beta_i) = H(\beta_i)^{n+1}$. Это позволило ему доказать [3], что при монотонной функции $\Psi(x)$, $x > 0$ и расходящемся $\sum_{h=1}^{\infty} \Psi(h) h^{n-1}$ неравенство

$$|P(x)| < \Psi(H(P)) \quad (5)$$

для почти всех x имеет бесконечное число решений в $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg P \leq n$. Заметим, что к моменту выхода статьи [3] из печати это утверждение не было доказано даже для $n = 2$. Несколько ранее неравенство (5) было рассмотрено и при сходимости ряда $\sum_{h=1}^{\infty} \Psi(h)h^{n-1}$ [1]. В результате работ [2, 3] мы имеем полный аналог классической метрической теоремы Хинчина [4] о приближении действительных чисел рациональными. Неравенство (5), как в случае сходимости, так и расходимости, обобщено на приближения в поле комплексных чисел \mathbb{C} [5], p -адических чисел \mathbb{Q}_p [6], а также на совместные приближения в различных метриках [7].

Важной проблемой в регулярных системах является эффективизация неравенства (1).

Обозначим

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \leq n, H(P) \leq Q\}.$$

Далее μ_A – мера Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$.

Следующая метрическая теорема будет основой для эффективизации (1).

Т е о р е м а 1. Пусть $I \subset \mathbb{R}$, $|I| = Q^{-\lambda}$, $0 \leq \lambda < 1$. Для постоянной $\delta_0 \in \mathbb{R}^+$ обозначим через $\mathcal{L}_n(\delta_0, Q)$ множество $x \in I$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-n}, \\ |P'(x)| < \delta_0 Q, \\ H(P) \leq Q \end{cases} \quad (6)$$

имеет решение в полиномах $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$. Тогда

$$\mu \mathcal{L}_n(\delta_0, Q) < \frac{1}{4} |I|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим вместо (6) систему

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-n}, \\ Q^{\nu_1} < |P'(x)| < \delta_0 Q, \\ H(P) \leq Q, \end{cases} \quad (7)$$

где ν_1 – положительная постоянная, значение которой будет уточнено далее.

Обозначим $S(\alpha_1)$ множество таких x , для которых α_1 является ближайшим корнем.

Здесь и далее c_1, c_2, \dots – некоторые положительные постоянные, зависящие только от n .

Л е м м а 1. Обозначим через $\mathcal{F}(\delta_0, I)$ множество векторов $\mathbf{b} = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$, для которых при $x \in I \subset [0, 1]$ выполняется неравенство

$$|P'(x)| < \delta_0 Q, \quad H(P) \leq Q, \quad (8)$$

где $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$.

Тогда

$$\#\mathcal{F}(\delta_0, I) < 2^{n+2} Q^n \delta_0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть при некотором $x_0 \in I$ для заданного подвектора $\mathbf{b}_1 = (a_n, \dots, a_3, a_2)$ найдется целое a'_1 , для которого выполняется неравенство

$$|na_n x_0^{n-1} + \dots + 2a_2 x_0 + a'_1| < \delta_0 Q. \quad (9)$$

Очевидно, $\mathcal{F}(\delta_0, I) \subseteq \mathcal{F}(\delta_0, \{x_0\}) =: \mathcal{F}_0$.

Оценим сверху величину $\#\mathcal{F}_0$.

Зафиксируем подвектор \mathbf{b}_1 . Оценим количество таких a_1 , что при данном подвекторе \mathbf{b}_1 выполняется неравенство

$$|na_n x_0^{n-1} + \dots + 2a_2 x_0 + a_1| < \delta_0 Q. \quad (10)$$

В силу (9) неравенство (10) может выполняться для $P'(x) = na_n x^{n-1} + \dots + 2a_2 x + a_1$ только при

$$|a_1 - a'_1| \leq 2\delta_0 Q. \quad (11)$$

Число всевозможных значений вектора $\mathbf{b}_1 = (a_n, \dots, a_2)$ не превосходит $(2Q+1)^{n-1} < 2^n Q^{n-1}$, а число таких a_1 , которые удовлетворяют (11) не превосходит $4\delta_0 Q$, откуда

$$\#F(\delta_0, I) \leq \#F_0 < 2^{n+2} Q^n \delta_0.$$

Нетрудно показать, пользуясь теоремой Лагранжа и неравенством $|x - \alpha_1| \leq n \frac{|P(x)|}{|P'(x)|}$, что из (7) следуют оценки

$$\frac{1}{2} Q^{v_1} < |P'(\alpha_1)| < 2\delta_0 Q. \quad (12)$$

Все x , для которых выполняется система неравенств (6), содержатся внутри интервала

$$\sigma(P) = \{x : |x - \alpha_1| < 2^{n-1} Q^{-n} |P'(\alpha_1)|^{-1}\}. \quad (13)$$

Определим интервал

$$\sigma_1(P) = \{x : |x - \alpha_1| < c_1 |P'(\alpha_1)|^{-1}\}. \quad (14)$$

Из (13) и (4) получим

$$\mu\sigma(P) < 2^{n-1} c_1^{-1} Q^{-n} \mu\sigma_1(P). \quad (15)$$

Оценим $P(x)$ для $x \in \sigma_1(P)$. По теореме Лагранжа

$$P(x) = P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \frac{P''(\xi)}{2}(x - \alpha_1)^2,$$

где ξ находится между x и α_1 .

Для второго слагаемого справедлива оценка

$$\frac{1}{2} |P''(\xi)| |x - \alpha_1|^2 \leq \frac{n^3 Q}{2} c_1^2 |P'(\alpha_1)|^{-2} \leq 2n^3 c_1^2 Q^{1-2v_1}.$$

Полагая $v_1 \geq \frac{1}{2}$ и выбирая $c_1 \leq \frac{1}{2n^3}$, получаем

$$|P''(\xi)| |x - \alpha_1|^2 < c_1,$$

откуда

$$|P(x)| < 2c_1. \quad (16)$$

Зафиксируем вектор $\mathbf{b} = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$. Обозначим через $\mathcal{P}_n(\mathbf{b}) = \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b})$ подкласс многочленов из $\mathcal{P}_n(Q)$ с одним и тем же \mathbf{b} .

Из (15) следует, что при $c_1 < 1/4$ промежутки $\sigma_1(P_1)$ и $\sigma_1(P_2)$, $P_1(x), P_2(x) \in \mathcal{P}_n(\mathbf{b})$, $P_1 \neq P_2$, не пересекаются, поскольку на пересечении мы имели бы противоречивое неравенство

$$1 \leq |P_2(x) - P_1(x)| < 4c_1 < 1.$$

Поэтому из (15) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{P \in \mathcal{P}_n(\mathbf{b})} \mu\sigma_1(P) &\leq |I|, \\ \sum_{P \in \mathcal{P}_n(\mathbf{b})} \mu\sigma(P) &\leq 2^{n-1} c_1^{-1} Q^{-n} |I|. \end{aligned} \quad (17)$$

По лемме 1 количество значений вектора \mathbf{b} не превосходит $2^{n+2} Q^n \delta_0$. Тогда из (17) имеем

$$\sum_{\mathbf{b}} \sum_{P \in \mathcal{P}_n(\mathbf{b})} \mu\sigma(P) \leq 2^{2n+1} c_1^{-1} |I| \delta_0.$$

Л е м м а 2. Задана система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-n}, \\ Q^{v_2} < |P'(x)| < Q^{1/2}, \\ H(P) \leq Q, \end{cases} \quad (18)$$

где v_2 – постоянная, $0 < v_2 < 1/2$.

Пусть $\mathcal{L}'_n(v_2, Q)$ – множество таких $x \in I$, для которых эта система имеет решение в многочленах $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$.

Тогда

$$\mu \mathcal{L}'_n(v_2, Q) \leq \frac{1}{8} |I|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем вектор $\mathbf{b}_1 = (a_n, \dots, a_2)$. Наряду с $\sigma(P)$ рассмотрим множество

$$\sigma_2(P) = \{x : |x - \alpha_1| < c_2 Q^{-1} |P'(\alpha_1)|^{-1}\}.$$

При этом

$$\mu \sigma(P) < 2^{n-1} c_2^{-1} Q^{-n+1} \mu \sigma_2(P). \quad (19)$$

Подобно формуле (12) получаем, что $\frac{1}{2} Q^{v_2} < |P'(\alpha_1)| < 2 Q^{1/2}$.

Оценим $P(x)$ и $P'(x)$ для $x \in \sigma_2(P)$. Из

$$\begin{aligned} P(x) &= P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \frac{P''(\xi)}{2}(x - \alpha_1)^2, \\ P'(x) &= P'(\alpha_1) + P''(\xi_1)(x - \alpha_1), \end{aligned}$$

где ξ и ξ_1 лежат на промежутке между x и α_1 , и оценок

$$|P''(\xi_1)(x - \alpha_1)| < n^3 Q \cdot c_2 Q^{-1} |P'(\alpha_1)|^{-1} < 2n^3 c_2 Q^{-v_2},$$

$$\left| \frac{P''(\xi)}{2}(x - \alpha_1)^2 \right| < \frac{n^3 Q}{2} \cdot c_2^2 Q^{-2} |P'(\alpha_1)|^{-2} < 2n^3 c_2^2 Q^{-1-2v_2},$$

справедливых при $v_2 \geq 0$, получаем

$$\begin{cases} |P(x)| < c_3 Q^{-1}, \\ |P'(x)| < 4Q^{1/2}, \end{cases} \quad (20)$$

где $c_3 = c_2 + 2n^3 c_2^2$.

Определим существенные и несущественные промежутки $\sigma_2(P)$.

Пусть $\mathbf{b}(k) = \mathbf{b}(P, k) = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_k)$ – вектор старших $n+1-k$ коэффициентов многочлена

$P = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $0 \leq k \leq n$. Обозначим

$$\mathcal{P}_n(\mathbf{b}_1) = \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_1) = \{P \in \mathcal{P}_n(Q) : \mathbf{b}(P, 2) = \mathbf{b}_1\}. \quad (21)$$

О п р е д е л е н и е 2. Промежуток $\sigma_2(P_1)$, $P_1 \in \mathcal{P}_n(\mathbf{b}_1)$ будем называть *несущественным*, если существует промежуток $\sigma_2(P_2)$, $P_2 \in \mathcal{P}_n(\mathbf{b}_1)$ такой, что

$$|\sigma_2(P_1) \cap \sigma_2(P_2)| \geq \frac{1}{2} |\sigma_2(P_1)|. \quad (22)$$

Иначе, если $\forall P_2 \in \mathcal{P}_n(\mathbf{b}_1)$, $P_2 \neq P_1$, выполняется неравенство

$$|\sigma_2(P_1) \cap \sigma_2(P_2)| < \frac{1}{2} |\sigma_2(P_1)|, \quad (23)$$

промежуток $\sigma_2(P_1)$ назовем *существенным*.

Введем обозначения для множества многочленов с существенными интервалами

$$\mathcal{P}'_n(\mathbf{b}_1) = \{p \in \mathcal{P}_n(\mathbf{b}_1) : \sigma_2(p) - \text{существенный}\}$$

и для множества многочленов с несущественными интервалами

$$\begin{aligned} \mathcal{P}''_n(\mathbf{b}_1) &= \{p \in \mathcal{P}_n(\mathbf{b}_1) : \sigma_2(p) - \text{несущественный}\}, \\ \mathcal{P}'_n(\mathbf{b}_1) &= \mathcal{P}_n(\mathbf{b}_1) \setminus \mathcal{P}''_n(\mathbf{b}_1). \end{aligned}$$

а) Существенные интервалы.

Оценим общую меру промежутков $\sigma_2(p)$ для многочленов из множества $\mathcal{P}'_n(\mathbf{b}_1)$. В силу неравенства (23) имеем

$$\sum_{P \in \mathcal{P}'_n(\mathbf{b}_1)} \mu \sigma_2(P) < 2|I|,$$

откуда с учетом (19) следует оценка

$$\sum_{P \in \mathcal{P}'_n(\mathbf{b}_1)} \mu \sigma(P) \leq 2^n c_2^{-1} Q^{-n+1} |I|.$$

Оценивая сверху количество возможных значений вектора \mathbf{b}_1 величиной $2^n Q^{n-1}$, получаем следующую оценку для меры в случае существенных промежутков

$$\mu \bigcup_{P \in \mathcal{P}'_n} \sigma(P) \leq \sum_{\mathbf{b}_1} \sum_{P \in \mathcal{P}'_n(\mathbf{b}_1)} \mu \sigma(P) \leq 2^{2n} c_2^{-1} |I|, \quad (24)$$

где $\mathcal{P}'_n = \mathcal{P}'_n(Q) = \bigcup_{\mathbf{b}_1} \mathcal{P}'_n(\mathbf{b}_1)$ – множество всех многочленов из $\mathcal{P}_n(Q)$, имеющих существенные интервалы σ_2 .

Из неравенства (24) видно, что за счет выбора постоянной c_2 можно сделать меру $\mu \bigcup_{P \in \mathcal{P}'_n} \sigma(P)$ сколь угодно малой по отношению к $|I|$.

б) Несущественные интервалы.

Оценим меру $\mu \bigcup_{P \in \mathcal{P}''_n} \sigma(P)$, где $\mathcal{P}''_n = \mathcal{P}_n(Q) \setminus \mathcal{P}'_n$.

Обозначим $\sigma_2(P_1, P_2) = \sigma_2(P_1) \cap \sigma_2(P_2)$. По определению для $\forall P_1 \in \mathcal{P}''_n$ существует многочлен $P_2 = P_2(P_1) \in \mathcal{P}_n(Q)$, $P_2 \neq P_1$ такой, что

$$\mu \sigma_2(P_1, P_2) \geq \frac{1}{2} \mu \sigma_2(P_1).$$

Пусть $P_1 \in \mathcal{P}''_n$. При этом для $\forall x \in \sigma_2(P_1, P_2)$ выполнено (20), т. е.

$$\begin{cases} |P_j(x)| < c_3 Q^{-1}, \\ |P'_j(x)| < 4Q^{1/2}, \end{cases} \quad j=1,2. \quad (25)$$

Рассмотрим многочлен $R(x) = P_2(x) - P_1(x) = ax + b$.

В силу (25) для $R(x)$ на $\sigma_2(P_1, P_2)$ будут выполняться неравенства

$$\begin{cases} |R(x)| < 2c_3 Q^{-1}, \\ |R'(x)| < 8Q^{1/2}, \end{cases} \quad x \in \sigma_2(P_1, P_2), \quad (26)$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} |ax + b| < 2c_3 Q^{-1}, \\ |a| < 8Q^{1/2}, \end{cases} \quad x \in \sigma_2(P_1, P_2). \quad (27)$$

Из (27) получаем

$$|x + b/a| < 2c_3 Q^{-1} |a|^{-1}, \quad \forall x \in \sigma_2(P_1, P_2). \quad (28)$$

Введем обозначение

$$\sigma_{a,b} = \{x \in I : |x + b/a| < 2c_3 Q^{-1} |a|^{-1}\}.$$

При этом, очевидно, справедливо неравенство

$$\mu \sigma_{a,b} \leq 4c_3 Q^{-1} |a|^{-1}.$$

Из (28) следует, что $\sigma_2(P_1, P_2) \subseteq \sigma_{a,b}$.

Мощность множества таких b , для которых множество $\sigma_{a,b}$ непусто, удовлетворяет соотношению

$$\#\{b \in \mathbb{Z} : \sigma_{a,b} \neq \emptyset\} \leq 2|a||I|,$$

откуда получаем

$$\sum_b \mu \sigma_{a,b} \leq 8c_3 Q^{-1} |I|.$$

Оценим сверху меру множества $\bigcup_{a,b} \sigma_{a,b}$

$$\mu \bigcup_{a,b} \sigma_{a,b} \leq \sum_a \sum_b \mu \sigma_{a,b} \leq 64c_3 Q^{-1/2} |I|.$$

Отсюда следует, что

$$\sum \mu \sigma_2(P_i, P_j) \leq 64c_3 Q^{-1/2} |I|.$$

Из вышесказанного окончательно получаем, что

$$\mu \bigcup_{P \in \mathcal{P}_n''} \sigma(P) \leq 128c_3 Q^{-1/2} |I| \leq \frac{1}{16} |I|$$

при достаточно большом Q .

Рассмотрим теперь систему неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-n}, \\ |P'(x)| < 1, \\ H(P) \leq Q. \end{cases} \quad (29)$$

Обозначим через $\mathcal{L}_n''(Q)$ множество всех таких $x \in I$, для которых система (29) имеет решение в $\mathcal{P}_n(Q)$. Очевидно,

$$\mathcal{L}_n''(Q) = \bigcup_{P \in \mathcal{P}_n(Q)} \{x \in I : |P(x)| < Q^{-n}, |P'(x)| < 1\}.$$

Для оценки меры $\mu \mathcal{L}_n''(Q)$ воспользуемся теоремой Клейнбока–Маргулиса (теорема 1.4 в работе [8]). По этой теореме справедлива следующая оценка для меры:

$$\mu \mathcal{L}_n''(Q) \leq c_4 Q^{\frac{-1}{(n+1)(2n-1)}} |I|.$$

Объединяя полученные выше результаты, получаем, что при достаточно большом Q и надлежащем выборе постоянных δ_0 , c_1 и c_2 выполняется неравенство

$$\mu \mathcal{L}_n(\delta_0, Q) < \frac{1}{4} |I|.$$

Литература

1. *Baker A., Schmidt W.* // Proc. London Math. 1970. Vol. 21, N 3. P. 1–11.
2. *Берник В. И.* // Acta Arith. 1989. Vol. 53. N 1. P. 17–28.
3. *Beresnevich V.* // Acta Arith. 1999. Vol. 90. N 2. P. 97–112.
4. *Khintchine A.* Einige // Math. Ann. 1924. Vol. 92. N 1–2. P. 115–125.
5. *Берник В. И., Васильев Д. В.* // Труды Института математики НАН Беларуси. Минск, 1999. Т. 3. С. 10–20.
6. *Beresnevich V. V., Bernik V. I., Kovalevskaya E. I.* // J. Number Theory. 2005. Vol. 111, N 1. P. 33–56.
7. *Budarina N., Dickinson D., Bernik V.* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 2010. Vol. 149. P. 193–216.
8. *Bernik V., Kleinbock D., Margulis G. A.* // Internat. Math. Res. Notices. 2001. N 9. P. 453–486.

V. I. BERNIK, F. GÖTZE, D. V. KOLEDA

EFFECTIVE REGULAR SYSTEMS

Summary

The upper bound of a height of integer polynomials, whose roots are uniformly distributed on the some subset of positive density of an arbitrary interval, is obtained.

УДК 511.42

В. А. ШЛЫК

**СОВМЕСТНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ
СУММОЙ ЦЕЛЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ**

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 15.05.2011)

Теория разбиений – одно из классических направлений в теории чисел и комбинаторике – изучает представления целых положительных чисел в виде сумм других целых положительных чисел

$$n = x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n, \quad x_i \in \mathbb{Z}, \quad x_i \geq 0, \quad i=1, \dots, n.$$

Задача о представлении натурального числа суммой натуральных чисел находит разнообразные применения как в разделах математики, так и в физике [1, 2].

В статье рассматривается обобщение этой задачи в нескольких направлениях. Пусть

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

– многочлен с целыми коэффициентами, $\deg P = n$, $H = H(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ – его высота. Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ корни $P(x)$. Если $(a_0, a_1, \dots, a_n) = 1$ и $P(x)$ неприводим над полем рациональных чисел \mathbb{Q} , то алгебраические числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называются сопряженными. При $a_n = 1$ числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называются целыми сопряженными числами. Обозначим через $\mathbf{P}_n(Q)$ класс многочленов

$$\mathbf{P}_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x] : \deg P(x) = n, H(P) \leq Q\}.$$

Подкласс $\mathbf{P}_n(Q)$ с условием $a_n = 1$ обозначим $\mathbf{P}_{n,1}(Q)$. В работе [3] доказано, что при любом $0 < \varepsilon < 1$, $l \in \mathbb{N}$ и $2 \leq k < n$ неравенство

$$\left| l - \sum_{j=1}^k \alpha_j \right| < \varepsilon \tag{1}$$

имеет не менее $c(n)\varepsilon Q^{n+1}$ решений в действительных сопряженных числах $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, корнях неприводимых многочленов $P(x) \in \mathbf{P}_{n,1}(Q)$. В данной работе этот результат обобщается на систему неравенств, обобщающих (1), и на подкласс $\mathbf{P}_{n,1}(Q)$.

Т е о р е м а 1. Пусть $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$, $l_1 \neq l_2$, $n > 5$. Тогда система неравенств

$$\begin{aligned} |l_1 - (\alpha_1 + \alpha_2)| &< \varepsilon_1, \\ |l_2 - (\alpha_3 + \alpha_4)| &< \varepsilon_2 \end{aligned} \tag{2}$$

имеет не менее $c(n)\varepsilon_1\varepsilon_2 Q^n$ решений в различных парах (α_1, α_2) , (α_3, α_4) корней многочленов $P(x) \in \mathbf{P}_{n,1}(Q)$.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 при $n \geq 4$ система неравенств вида (2) имеет не менее $c(n)\varepsilon_1\varepsilon_2Q^n$ решений в парах сопряженных корней (α_1, α_2) , (α_1, α_3) многочленов $P(x) \in \mathbb{P}_{n,1}(Q)$.

В доказательстве теоремы 1 мы укажем отличия от близкого утверждения из [3].

Прямым подходом к задаче о разрешимости неравенства $|P(x)| < H^{-w}$, $w > 0$, в многочленах $P(x) \in \mathbb{P}_{n,1}(Q)$ доказать теорему 1 невозможно, так как тело $T_1 \subset \mathbb{R}^n$, определяемое неравенством $|x^n + t_{n-1}x^{n-1} + \dots + t_1x + t_0| < H^{-w}$, не симметрично относительно нуля и к нему нельзя применить теорему Минковского о выпуклом теле. В рассматриваемом случае поступим так. Определим тело T_2 системой неравенств

$$\begin{aligned} |t_{n-1}x_i^{n-1} + \dots + t_1x_i + t_0| < Q_1^{-w_1}, i=1,2, w_1 > 0, |t_j| \leq Q, 2 \leq j \leq n-1, \\ |t_{n-1}y_i^{n-1} + \dots + t_1y_i + t_0| < Q_1^{-w_2}, i=1,2, w_2 > 0, w_1 + w_2 = n-2. \end{aligned}$$

Это выпуклое симметричное относительно нуля тело в \mathbb{R}^n относительно $(t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$. Нам надо дать оценку снизу для первого минимума Минковского λ_1 тела T_2 [4].

Лемма. Обозначим через $L_{n-1}(Q_1)$ множество $(x, y) \in I_1 \times I_2$, $I_1 = [a_1, b_1]^2$, $I_2 = [a_2, b_2]^2$, для которых система неравенств

$$|P(x_i)| < c_1Q_1^{-w_1}, |P(y_i)| < c_1Q_1^{-w_2}, w_1 + w_2 = n-4, i=1,2, \quad (3)$$

имеет хотя бы одно решение хотя бы для одного целочисленного многочлена $P(x)$, $\deg P(x) \leq n-1$, $H(P) \leq Q_1$. Тогда при $c_1 < n^{-2}2^{-2n-60}$ справедливо неравенство $\mu L_{n-1}(Q_1) < \frac{1}{4}(b_1 - a_1)^2(b_2 - a_2)^2$.

Доказательство леммы можно провести различными способами [5, 6]. Если теперь рассмотреть тело $2^{-8}T_2$ и взять $\bar{u} = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in B_1 \subset (I_1 \times I_2) \setminus L_{n-1}(Q_1)$, то из леммы получим, что первый минимум $\lambda_1 > 2^{-8}$. Так как по теореме Минковского о последовательных минимумах $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n \cdot \mu T_2 \leq 2^n$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ и $\mu T_2 = 2^n$, то получаем $\lambda_n \leq 2^{-8(n-1)}$. Таким образом, в каждой точке $\bar{u} \in B_1$ существуют n линейно независимых многочленов, удовлетворяющих условиям

$$|P(x_i)| < c_2Q_1^{\frac{n-4}{4}}, |P(y_i)| < c_2Q_1^{\frac{n-4}{4}}, i=1,2. \quad (4)$$

На базе этих многочленов можно, как в [7], построить унитарные многочлены $S(x_i) = x_i^n + b_{n-1}x_i^{n-1} + \dots + b_1x_i + b_0$, $S(y_i) = y_i^n + b_{n-1}y_i^{n-1} + \dots + b_1y_i + b_0$, $i=1,2$, также удовлетворяющие (4) и дополнительному условию $|S'(x_i)| > c_3Q_1$, $|S'(y_i)| > c_3Q_1$, $i=1,2$. Из условий на $S(x_i)$ и $S'(x_i)$, $S(y_i)$ и $S'(y_i)$ нетрудно получить существование четырех целых алгебраических чисел $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|x_i - \alpha_i| < c_4Q_1^{\frac{n}{4}}, |y_i - \beta_i| < c_4Q_1^{\frac{n}{4}}, i=1,2. \quad (5)$$

Далее в полосы $|l_1 - (x_1 + y_1)| < \varepsilon_1$ и $|l_2 - (x_2 + y_2)| < \varepsilon_2$ как и в [3] впишем квадраты M_1 и M_2 со сторонами $\frac{\varepsilon_1}{2}$ и $\frac{\varepsilon_2}{2}$ соответственно. К каждой паре квадратов применим лемму и получим систему неравенств (5). Это означает, что в каждой паре квадратов (M_1, M_2) содержится $c_5Q^n\varepsilon_1\varepsilon_2$ пар алгебраических чисел (α_1, α_2) , (β_1, β_2) . Так как количество пар квадратов (M_1, M_2) не менее $c_6\varepsilon_1\varepsilon_2$, то теорема 1 доказана.

Для доказательства теоремы 2 нужно систему неравенств в лемме заменить на систему

$$|P(x_i)| < c_1Q^{-w_1}, |P(y_i)| < c_1Q^{-w_2}, i=1,2, w_1 + 2w_2 = n-1$$

и провести аналогичные рассуждения.

Литература

1. *Shlyk V. A.* // European J. Combin. 2005. Vol. 26, N 8. P. 1139–1153; doi:10.1016/j.ejc.2004.08.004.
2. *Шлык В. А.* // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 6. С. 27–32.
3. *Шлык В. А.* // Докл. НАН Беларуси. 2010. Т. 54, № 3. С. 10–13.
4. *Касселс Д. В. С.* Введение в теорию диофантовых приближений. М., 1961.
5. *Берник В. И.* // Известия АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44, № 1. С. 24–45.
6. *Bernik V. I., Cusco O., Götze* // Acta Arithmetica. 2008. Vol. 133. P. 375–390.
7. *Bugeaud Y.* // J. London Math. Soc. 2002. Vol. 65. P. 547–559; doi: 10.1112/S0024610702003137.

V. A. SHLYK

SIMULTANEOUS APPROXIMATIONS OF NATURAL NUMBERS BY SUMS OF INTEGER ALGEBRAIC NUMBERS

Summary

We give bounds on the number of simultaneous approximations of two fixed integer numbers by sums of two integer algebraic numbers.

УДК 517.925.4

А. И. ЛАПУЦКИЙ

**О НОВЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ ГАРНЬЕ
 С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ**

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 24.06.2011)

Введение. Как известно, система Гарнье является обобщением уравнений Пенлеве на случай многих переменных. Причем система Гарнье с одной независимой переменной совпадает с шестым уравнением Пенлеве.

Данная статья посвящена описанию новых классов алгебраических решений системы Гарнье с двумя независимыми переменными.

Рассмотрим систему Гарнье с двумя независимыми переменными (далее G_2) в гамильтоновой форме [1], состоящую из восьми уравнений

$$\frac{\partial q_j}{\partial t_i} = \frac{\partial H_i}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial p_j}{\partial t_i} = -\frac{\partial H_i}{\partial q_j}, \quad i, j = 1, 2. \quad (1)$$

Гамильтонианы H_1 и H_2 для G_2 могут быть представлены через гамильтониан для шестого уравнения Пенлеве [2, 3]

$$H_{VI}(q, p, t, \alpha_1, \dots, \alpha_6) = \frac{1}{(t-1)}(p^2(q-1)q(q-t) - p(q\alpha_4(q-t) + \alpha_5(q-1)(q-t) + q(q-1)(\alpha_1-1)) + \alpha_3(\alpha_2 + \alpha_3)(q-t)), \quad (2)$$

$$H_1(q_1, p_1, q_2, p_2, t_1, t_2, \alpha_1, \dots, \alpha_6) = H_{VI}(q_1, p_1, t_1, \alpha_4 + \alpha_6, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_5, \alpha_3) + (2\alpha_1 + \alpha_2) \frac{q_1 q_2 p_2}{t_1(t_1-1)} + \alpha_3 q_2 \left(\frac{p_1}{t_1-t_2} - \frac{p_2(t_2-1)}{(t_1-1)(t_1-t_2)} \right) + \alpha_4 q_1 t_2 \frac{p_2 - p_1}{t_1(t_1-t_2)} + q_1 q_2 \left(\frac{2p_1 p_2(t_2-1)}{(t_1-1)(t_1-t_2)} - \frac{t_1^2 p_1^2 + t_2^2 p_2^2}{t_1(t_1-t_2)} + \frac{(2q_1 p_1 + q_2 p_2) p_2}{t_1(t_1-1)} \right). \quad (3)$$

H_2 получается из H_1 при помощи преобразования π : $H_2 = \pi(H_1)$

$$\pi: (q_1, p_1, q_2, p_2, t_1, t_2, \alpha_1, \dots, \alpha_6) \rightarrow (q_2, p_2, q_1, p_1, t_2, t_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6). \quad (4)$$

При этом условие связи коэффициентов $\alpha_i \in \mathbb{C}$ для H_i имеет вид:

$$2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 1. \quad (5)$$

Гамильтониан H_{VI} получается из H_1 при следующих условиях:

$$H_1(q_1, p_1, 0, 0, t_1, 0, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_5, 0, \alpha_4, \alpha_1) \text{ или } H_1(q_1, p_1, 0, 0, t_1, 0, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_1, \alpha_4, 0). \quad (6)$$

Также известны преобразования:

$$w_1 = (q_1, p_1, p_2, q_2, t_1, t_2, \alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6), \quad (7)$$

$$w_2 = (q_1, p_1 - \frac{\alpha_3}{q_1}, p_2, q_2, t_1, t_2, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6), \quad (8)$$

$$w_3 = (q_1, p_1, p_2, q_2 - \frac{\alpha_4}{q_2}, t_1, t_2, \alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2, \alpha_3, -\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6), \quad (9)$$

$$w_4 = (q_1, p_1 - \frac{\alpha_5}{q_1 + q_2 - 1}, q_2, p_2 - \frac{\alpha_5}{q_1 + q_2 - 1}, t_1, t_2, \alpha_1 + \alpha_5, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, -\alpha_5, \alpha_6), \quad (10)$$

$$w_5 = (q_1, p_1 - \frac{\alpha_6}{q_1 + q_2 \frac{t_1}{t_2} - t_1}, q_2, p_2 - \frac{\alpha_6 t_1}{s(q_1 + q_2 \frac{t_1}{t_2} - t_1)}, t_1, t_2, \alpha_1 + \alpha_6, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, -\alpha_6), \quad (11)$$

$$\pi_1 = (\frac{p_1(q_1 p_1 - \alpha_3)}{A}, \frac{A}{p_1}, \frac{p_2(q_2 p_2 - \alpha_4)}{A}, \frac{A}{p_2}, \frac{1}{t_1}, \frac{1}{t_2}, -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, 1 - \alpha_6, 1 - \alpha_5), \text{ где } A = (q_1 p_1 + q_2 p_2 + \alpha_1)(q_1 p_1 + q_2 p_2 + \alpha_1 + \alpha_2), \quad (12)$$

$$\pi_2 = (1 - q_1 - q_2, -p_1, q_2, p_2 - p_1, 1 - t_1, \frac{(t_1 - 1)t_2}{t_1 - t_2}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_6), \quad (13)$$

$$\pi_3 = (\frac{-t_2 q_1 - t_1 q_2 + t_1 t_2}{(t_1 - 1)t_2}, -(t_1 - 1) q_2, p_2, \frac{(t_1 - t_2)q_2}{(t_1 - 1)t_2}, \frac{(t_1 - 1)(t_1 p_1 - t_2 p_2)}{t_1 - t_2}, \frac{t_1}{t_1 - 1}, \frac{t_1 - t_2}{t_1 - 1}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_6, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_3), \quad (14)$$

$$\pi_4 = (\frac{q_1}{t_1}, t_1 p_1, \frac{q_2}{t_2}, t_2 p_2, \frac{1}{t_1}, \frac{1}{t_2}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_5), \quad (15)$$

$$\pi_5 = (\frac{q_1}{q_2}, -p_1 q_2, \frac{1}{q_2}, -q_2 (q_1 p_1 + q_2 p_2 + \alpha_1), \frac{t_1}{t_2}, \frac{1}{t_2}, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_6), \quad (16)$$

$$\pi_6 = (q_2, p_2, q_1, p_1, t_2, t_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6), \quad (17)$$

которые изоморфны бирациональным преобразованиям, составляющим аффинную группу Вейля $B_5^{(1)}$. В общем случае система G_n имеет симметрию аффинной группы Вейля $B_{n+3}^{(1)}$ [2]. Преобразования (7) – (17) являются преобразованиями Бэклунда для гамильтоновой формы G_2 . Если известно некоторое решение исходной системы (1), то при помощи (7) – (17) можно получить классы новых решений для данной системы.

Лемма 1. Если в системе (1) q_1 зависит только от t_1 , то q_2 зависит только от t_2 и выполняется

$$\left(\frac{q_2(t_2)}{b}\right)^{\ln t_1} = \left(\frac{q_1(t_1)}{a}\right)^{\ln t_2}, \quad (18)$$

где a и b – константы.

Доказательство. Подставим вектор неизвестных функций $(q_1(t_1), p_1(t_1, t_2), q_2(t_1, t_2), p_2(t_1, t_2), t_1, t_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$ в исходную систему (1) с гамильтонианами (3):

$$t_1 (t_1 - t_2) (t_1 - 1) \frac{\partial q_1(t_1)}{\partial t_1} + 2 p_1(t_1, t_2) q_1(t_1)^3 (t_2 - t_1) + q_1(t_1)^2 (t_1 - t_2) (2 p_1(t_1, t_2) (1 + t_1) + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 - 1 - 2 q_2(t_1, t_2) p_2(t_1, t_2)) + q_1(t_1) (t_1^2 (2 p_1(t_1, t_2)^2 (q_2(t_1, t_2) - 1) - \alpha_3 - \alpha_5) + t_2 (\alpha_3 + \alpha_6 - 1) - t_1 (2 p_1(t_1, t_2) (q_2(t_1, t_2) - t_2) + 2 p_2(t_1, t_2) q_2(t_1, t_2) (t_2 - 1) - t_2 (\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6 - 1)) + \alpha_3 t_1 (t_1 - t_2 - q_2(t_1, t_2) (t_1 - 1))) = 0, \quad (19)$$

$$t_1(t_1 - t_2)(t_1 - 1) \frac{\partial p_1(t_1, t_2)}{\partial t_1} + (\alpha_1^2 + \alpha_1 \alpha_2)(t_1 - t_2) + p_1(t_1, t_2)^2 (3 q_1(t_1)(t_1 + 1)(t_1 - t_2) - 2 q_1(t_1)(t_1 - t_2) \times (t_1 + 1) + t_1(t_1 - t_2 - q_2(t_1, t_2)(t_1 - 1)) + p_2(t_1, t_2)^2 q_2(t_1, t_2)(q_2(t_1, t_2)(t_1 - t_2) - t_2(t_1 - 1)) + p_2(t_1, t_2)(q_2(t_1, t_2) \times (t_1 - t_2)(2\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 t_2(t_1 - 1)) + p_1(t_1, t_2)(t_1^2(\alpha_3 + \alpha_5) - t_2(\alpha_3 + \alpha_6 - 1 + q_1(t_1)(4 q_2(t_1, t_2) p_2(t_1, t_2) - 2(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 - 1)))) + t_1(2 q_2(t_1, t_2) p_2(t_1, t_2)(t_2 - 1) - 1 - t_2(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6 + q_1(t_1)(4 q_2(t_1, t_2) p_2(t_1, t_2) - 2(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 - 1)))) = 0, \quad (20)$$

$$t_1(t_1 - t_2)(t_1 - 1) \frac{\partial q_2(t_1, t_2)}{\partial t_1} - 2 p_2(t_1, t_2) q_1(t_1)(q_2(t_1, t_2)(t_1 - t_2) - t_2(t_1 - 1)) - 2 p_1(t_1, t_2) q_1(t_1) q_2(t_1, t_2) \times (-q_1(t_1) t_2 + t_1(t_2 + q_1(t_1) - 1)) + q_1(t_1) q_2(t_1, t_2) (-2\alpha_1 t_1 + 2\alpha_1 t_2 - \alpha_2 t_1 + \alpha_2 t_2) - \alpha_3 t_1 q_2(t_1, t_2) + \alpha_3 t_2 t_1 q_2(t_1, t_2) + \alpha_4 t_2 q_1(t_1) - \alpha_4 t_2 t_1 q_1(t_1) = 0, \quad (21)$$

$$t_1(t_1 - t_2)(t_1 - 1) \frac{\partial p_2(t_1, t_2)}{\partial t_1} - p_1(t_1, t_2)^2 q_1(t_1) t_1(t_1 - 1) + p_2(t_1, t_2)^2 q_1(t_1)(2 q_2(t_1, t_2)(t_1 - t_2) - t_2(t_1 - 1)) + p_1(t_1, t_2)(2 p_2(t_1, t_2) q_1(t_1)(-q_1(t_1) t_2 + t_1(q_1(t_1) + t_2 - 1)) + \alpha_3 t_1(t_1 - 1)) + p_2(t_1, t_2)(q_1(t_1)(t_1 - t_2)(2\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_3 t_1(t_2 - 1))) = 0, \quad (22)$$

$$2 p_2(t_1, t_2) q_1(t_1) q_2(t_1, t_2)(q_2(t_1, t_2)(t_1 - t_2) - t_2(t_1 - 1)) + 2 p_1(t_1, t_2) q_1(t_1) q_2(t_1, t_2)(-q_1(t_1) t_2 + t_1(t_2 + q_1(t_1) - 1)) + q_1(t_1) q_2(t_1, t_2)(2\alpha_1 t_1 - 2\alpha_1 t_2 + \alpha_2 t_1 - \alpha_2 t_2) + \alpha_3 t_1 q_2(t_1, t_2) - \alpha_3 t_2 t_1 q_2(t_1, t_2) - \alpha_4 t_2 q_1(t_1) + \alpha_4 t_2 t_1 q_1(t_1) = 0, \quad (23)$$

$$t_2(t_1 - t_2)(t_2 - 1) \frac{\partial p_1(t_1, t_2)}{\partial t_2} + p_1(t_1, t_2)^2 q_2(t_1, t_2)(-2 q_1(t_1) t_2 + t_1(-1 + 2 q_1(t_1) + t_2)) + p_1(t_1, t_2) \times (2 p_2(t_1, t_2) q_2(t_1, t_2)(q_2(t_1, t_2)(t_1 - t_2) - t_2(t_1 - 1)) + q_2(t_1, t_2)(t_1 - t_2)(2\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_2 t_2(t_1 - 1) + t_2(t_2 - 1) p_2(t_1, t_2)(p_2(t_1, t_2) q_2(t_1, t_2) - \alpha_4)) = 0, \quad (24)$$

$$t_2(t_1 - t_2)(t_2 - 1) \frac{\partial q_2(t_1, t_2)}{\partial t_2} + \alpha_4 t_2(q_1(t_1)(t_2 - 1) + t_1 - t_2) + 2 p_2(t_1, t_2) q_2(t_1, t_2)^3(t_2 - t_1) + q_2(t_1, t_2)^2 \times (t_1 - t_2)(-2 p_1(t_1, t_2) q_1(t_1) + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 - 1 + 2 p_2(t_1, t_2)(t_2 + 1)) + q_2(t_1, t_2)(t_2(-1 - 2 p_1(t_1, t_2) \times q_1(t_1) + 2 p_2(t_1, t_2)(t_2 - q_1(t_1)(t_2 - 1) + t_2(\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6) - t_1(-1 - 2 p_2(t_1, t_2) t_2 - 2 p_1(t_1, t_2) q_1(t_1) t_2 + t_2(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) + \alpha_4 + \alpha_6))) = 0, \quad (25)$$

$$t_2(t_1 - t_2)(t_2 - 1) \frac{\partial p_1(t_1, t_2)}{\partial t_1} + (\alpha_1^2 + \alpha_1 \alpha_2)(t_1 - t_2) + p_2(t_1, t_2)^2 (3 q_2(t_1, t_2)^2(t_1 - t_2) + (t_1 + q_1(t_1)) \times (t_2 - 1) - t_2 - 2 q_2(t_1, t_2)(t_1 - t_2)(t_2 + 1)) + p_1(t_1, t_2)^2 q_1(t_1)(-q_1(t_1) t_2 + t_1(q_1(t_1) - 1 + t_2)) + p_1(t_1, t_2) \times (q_1(t_1)(t_1 - t_2)(2\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_3 t_1(t_2 - 1)) + p_2(t_1, t_2)(-t_2(-1 + 2 p_1(t_1, t_2) q_1(t_1)(2 q_2(t_1, t_2) - 1) + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6 + t_2(\alpha_4 + \alpha_5) - 2 q_2(t_1, t_2)(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 - 1)) + t_1(-1 - 2 p_1(t_1, t_2) q_1(t_1) t_2 + t_2(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) + \alpha_4 + \alpha_6 + q_2(t_1, t_2)(4 p_1(t_1, t_2) q_1(t_1) - 2(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 - 1)))) = 0 \quad (26)$$

Полученная система (19) – (26) ограничивает систему (1) только в том, что q_1 не зависит от t_2 . Решая уравнение (23), не содержащее производной q_1 по t_2 , относительно $p_1(t_1, t_2)$ и подставляя его в (19) – (26), находим, что уравнение (21) имеет вид $\frac{\partial q_2(t_1, t_2)}{\partial t_1} = 0$. Значит, если $q_1 = q_1(t_1) \Rightarrow q_2 = q_2(t_2)$. Далее, решая уравнение (19) относительно $p_2(t_1, t_2)$ и подставляя его вместе с условием (5) в (19) – (26), находим, что уравнение (25) принимает вид

$$\frac{\partial q_2(t_2)}{\partial t_2} \frac{t_2}{q_2(t_2)} = \frac{\partial q_1(t_1)}{\partial t_1} \frac{t_1}{q_1(t_1)}. \quad (27)$$

Интегрируя (27) два раза, получим, уравнение (28), где a и b первая и вторая константы интегрирования соответственно. Уравнению (27) соответствует случай, когда

$$q_1(t_1) = a t_1^c \text{ и } q_2(t_2) = b t_2^c, \quad (29)$$

где $c = \text{const}$. Лемма 1 доказана.

Теорема. Система (1) имеет решения:

$$(at_1^{\alpha_5}, 0, bt_2^{\alpha_5}, 0, t_1, t_2, \alpha_1, 0, 0, 0, \alpha_5, 1 - \alpha_5), \quad (30)$$

$$\left(at_1^{-\alpha_5}, \frac{\alpha_5}{at_1^{-\alpha_5} + bt_2^{-\alpha_5} - 1} + \frac{t_1^{\alpha_5} t_2^{1+\alpha_5} (1 + \alpha_5)}{t_1^{1+\alpha_5} (t_2^{1+\alpha_5} - b) - at_2^{1+\alpha_5}}, bt_2^{-\alpha_5}, \right. \\ \left. \frac{\alpha_5}{at_1^{-\alpha_5} + bt_2^{-\alpha_5} - 1} + \frac{t_1^{1+\alpha_5} t_2^{\alpha_5} (1 + \alpha_5)}{t_1^{1+\alpha_5} (t_2^{1+\alpha_5} - b) - at_2^{1+\alpha_5}}, t_1, t_2, 1, 0, 0, 0, \alpha_5, 1 - \alpha_5 \right), \quad (31)$$

$$\left(at_1^{\alpha_5}, \frac{t_2(\alpha_5 - 1)}{at_1^{\alpha_5} t_2 + t_1(bt_2^{\alpha_5} - t_2)}, bt_2^{\alpha_5}, \right. \\ \left. \frac{t_1(\alpha_5 - 1)}{at_1^{\alpha_5} t_2 + t_1(bt_2^{\alpha_5} - t_2)}, t_1, t_2, 1 - \alpha_5, 0, 0, 0, \alpha_5, -1 + \alpha_5 \right) \quad (32)$$

$$\left(at_1^{-\alpha_5}, -\frac{t_1^{\alpha_5} t_2^{\alpha_5} \alpha_5}{-at_1^{\alpha_5} + t_1^{\alpha_5} (-b + t_2^{\alpha_5})}, bt_2^{-\alpha_5}, \right. \\ \left. -\frac{t_1^{\alpha_5} t_2^{\alpha_5} \alpha_5}{-at_1^{\alpha_5} + t_1^{\alpha_5} (-b + t_2^{\alpha_5})}, t_1, t_2, -\alpha_5, 0, 0, 0, \alpha_5, 1 + \alpha_5 \right), \quad (33)$$

которые при $\alpha_5 \in \mathbb{Q}$ являются алгебраическими.

Доказательство. В условиях леммы 1 исходный вектор неизвестных функций $(q_1(t_1), p_1(t_1, t_2), q_2(t_1, t_2), p_2(t_1, t_2), t_1, t_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$ (с учетом (29), (5) и того, что исключены $p_1(t_1, t_2)$ и $p_2(t_1, t_2)$) примет вид:

$$\left(at_1^c, \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_3}{at_1^c} + \frac{\alpha_5 - c}{at_1^c + bt_2^c - 1} + \frac{t_2(2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 - c)}{-at_1^c t_2 + t_1(t_2 - bt_2^c)} \right), bt_2^c, \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_4}{bt_1^c} + \frac{\alpha_5 - c}{at_1^c + bt_2^c - 1} + \frac{t_1(2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 - c)}{-at_1^c t_2 + t_1(t_2 - bt_2^c)} \right), \right. \\ \left. t_1, t_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, 1 - 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 \right). \quad (34)$$

Подставим (34) в (19) – (26). Уравнения (19), (21), (23), (25) в этой системе станут тождественны нулю. Осталось рассмотреть оставшиеся уравнения на предмет равенства нулю всех коэффициентов при t_1 и t_2 . Составим из этих коэффициентов систему и решим относительно $a, b, c, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$. Подставив все полученные соотношения в (34), получим классы новых алгебраических решений. Теорема доказана.

При помощи преобразований (7) – (17) каждое из решений (30) – (33) порождает цепочки новых алгебраических решений. Фиксируя в (34) параметр c , можно получать классы решений, в которых сохраняется большее число параметров α_i . Например, справедлива

Лемма 2. Система (1) имеет алгебраические решения:

$$\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2} \sqrt{t_1}, -\frac{\alpha_2}{2\sqrt{t_1}}, \frac{\alpha_4}{\alpha_2} \sqrt{t_2}, \frac{\alpha_2}{2\sqrt{t_2}}, t_1, t_2, -\frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4), \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad (35)$$

$$\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2} \sqrt{t_1}, \frac{1}{2} \alpha_2 \left(\frac{1}{\sqrt{t_1}} + \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_3 \sqrt{t_1} + \alpha_4 \sqrt{t_2}} \right), -\frac{\alpha_4}{\alpha_2} \sqrt{t_2}, \frac{1}{2} \alpha_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{t_2}} + \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_3 \sqrt{t_1} + \alpha_4 \sqrt{t_2}} \right) \right),$$

$$t_1, t_2, \frac{1}{2} (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 1), \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\alpha_4}{\alpha_2} \sqrt{t_2}, \quad (36)$$

$$\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2} \sqrt{t_1}, \frac{1}{2} \alpha_2 \left(\frac{1}{\sqrt{t_1}} + \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_3 \sqrt{t_1} + \alpha_4 \sqrt{t_2}} + \frac{\sqrt{t_2}}{-\alpha_3 \sqrt{t_1} \sqrt{t_2} + t_1 (\alpha_2 \sqrt{t_2} + \alpha_4)} \right), -\frac{\alpha_4}{\alpha_2} \sqrt{t_2}, \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \alpha_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{t_2}} + \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_3 \sqrt{t_1} + \alpha_4 \sqrt{t_2}} + \frac{\sqrt{t_2}}{\alpha_4 \sqrt{t_1} \sqrt{t_2} + t_2 (\alpha_2 \sqrt{t_1} - \alpha_3)} \right) \right),$$

$$t_1, t_2, \frac{1}{2} (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 2), \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \quad (37)$$

(всего 20 решений; здесь приведены только три).

Доказательство. Если в (34) $c = \frac{1}{2}$, то, проводя вычисления, аналогичные вычислениям в теореме, получим классы алгебраических решений (35) – (37). При этом сохраняются параметры $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Лемма 2 доказана.

З а м е ч а н и е. При $\alpha_5 \in \mathbb{Z}$, решения (30) – (33) имеют полюса по t_1 и t_2 : 1) произвольного порядка в точке ноль; 2) первого порядка в некоторой точке (при $\alpha_5 = 1, b = 0$ полюс по t_1 в точках $a, \pm\sqrt{a}$; при $\alpha_5 = 1, a = 0$ полюс по t_2 в точках $b, \pm\sqrt{b}$).

Литература

1. Sasano Y. // arXiv: 0704.2869v1 [math. AG], 31p.
2. Suzuki T. // Funkcial. Ekvac. 2005. Vol. 48. P. 203–230.
3. Noumi M., Yamada Y. // Funkcial. Ekvac. 1998. Vol. 41. P. 483–503.

A. I. LAPUTSKI

NEW ALGEBRAIC SOLUTIONS OF THE GARNIER SYSTEM WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES

Summary

This article describes new classes of algebraic solutions of the Garnier system in two independent variables, which is a generalization of the Painleve equations to the case of many variables.

УДК 531.132.2

С. А. БОРИСЕВИЧ¹, А. Н. КАМЛЮК²

МОДЕЛЬ ГИБКОГО СТЕРЖНЯ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДИНАМИКИ ПАДЕНИЯ СТВОЛА ДЕРЕВА

¹Белорусский государственный технический университет

²Командно-инженерный институт МЧС Республики Беларусь

(Поступила в редакцию 03.06.2011)

Введение. Динамика тонких гибких стержней, подверженных воздействию внешних сил, моментов и параметрическому возбуждению, остается активно развивающимся направлением механики. Результаты исследований в этой области могут найти применение в различных инженерных задачах: анализ ускоряющейся ракеты и космического судна, компонентов высокоскоростных машин, рук манипуляторов, нанoeлектронных механических структур, компонентов мостов, изучение движения длинных волокон в жидкостях и т. п. [1–6]. Точное решение задач о движении деформируемых систем в рамках классической теории упругости удается получить в замкнутой форме лишь в немногих относительно простых случаях. В общем случае это сделать невозможно, поэтому приходится упрощать расчетную модель, в частности, путем уменьшения числа степеней свободы. В настоящее время существует ряд эффективных методов для численного моделирования гибких стержней [1, 2].

В данной работе исследуется трехмерная динамика нерастяжимого упругого стержня на основе так называемой *rod-chain model* [3]. В этой модели гибкий стержень представляется в виде цепочки из нескольких жестких фрагментов, каждый из которых в свою очередь состоит из соединенных жестко друг с другом набора сфер, выстроенных в одну линию. На каждую из сфер действуют внешние силы, которые приводят к деформации стержня. Отличительной особенностью модели, рассматриваемой в данной работе, является то, что внешние силы приложены к одной точке фрагментов стержня – к их центрам масс. Эта модель позволяет получить хорошую аппроксимацию нелинейного поведения гибких структур с различными внутренними свойствами и различной геометрией. Такое моделирование, а именно, моделирование гибкого тела конечным числом гибких элементов, соединенных жестко, широко используется и имеет преимущества по сравнению с конечно-элементным способом. Во-первых, высокая точность динамического поведения может быть достигнута делением стержня на небольшое количество фрагментов, которое намного меньше, чем при традиционном конечно-элементном методе, в котором интерполяционная функция обычно очень простая. Во-вторых, математически проще моделировать деформируемые тела как многочастичную систему, состоящую из жестких и деформируемых компонентов. Кроме того, получаемые нелинейные дифференциальные уравнения, как правило, легче интегрировать.

1. Общие сведения. Рассмотрим общую задачу движения гибкого стержня в трехмерном пространстве. Введем декартову систему координат (x, y, z) в некотором инерциальном базисе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ (рис. 1). Примем гипотезу Бернулли, согласно которой поперечные сечения стержня претерпевают только жесткие повороты во время деформации стержня и остаются плоскими после деформации, сохраняя свою форму и размеры. Ориентацию поперечного сечения в произвольном сечении s будем задавать ортогональным базисом $\mathbf{d}_i(s, t)$ ($i = 1, 2, 3$), называемым подвижным. Причем единичный вектор \mathbf{d}_3 нормальный к поперечному сечению, а \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 лежат

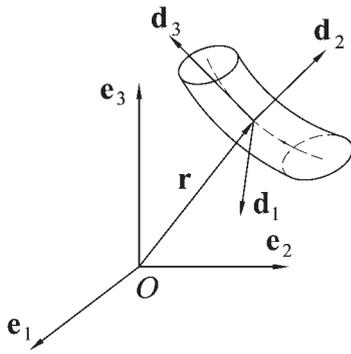


Рис. 1. Модель стержня в инерциальном базисе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

в плоскости сечения. В этом случае движение участка стержня будем описывать радиус-вектором его нейтральной линии $\mathbf{r}(s, t)$ и тремя ортогональными единичными векторами $\mathbf{d}_i(s, t)$ ($i = 1, 2, 3$) [2].

В инерциальном декартовом базисе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ можем записать:

$$\mathbf{r}(s, t) = r_i(s, t)\mathbf{e}_i = x(s, t)\mathbf{e}_1 + y(s, t)\mathbf{e}_2 + z(s, t)\mathbf{e}_3. \quad (1)$$

При движении стержень имеет скорость осевой линии $\mathbf{v}(s, t) = \frac{\partial \mathbf{r}(s, t)}{\partial t}$ и угловую скорость поперечного сечения $\mathbf{w}(s, t)$.

Рассмотрим производную от единичного вектора подвижного базиса по времени $\mathbf{d}_i(s, t) \equiv \mathbf{d}_i$ и представим ее в виде разложения по базису $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$:

$$\frac{\partial \mathbf{d}_i}{\partial t} = \mathbf{w} \times \mathbf{d}_i.$$

Домножим последнее выражение векторно слева на \mathbf{d}_i , имеем

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{d}_i \times \frac{\partial \mathbf{d}_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{d}_i \times (\mathbf{w} \times \mathbf{d}_i) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{w}(\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_i) - \mathbf{d}_i(\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{w}) = 2\mathbf{w},$$

откуда вектор угловой скорости получаем в виде

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \mathbf{d}_i \times \frac{\partial \mathbf{d}_i}{\partial t}. \quad (2)$$

Поворот подвижного базиса при его движении вдоль пространственной кривой описывается вектором деформации $\mathbf{u}(s, t)$. Аналогично, рассматривая производную от единичного вектора подвижного базиса по дуговой координате и представив ее в виде разложения по базису $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$, получим вектор деформации:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{d}_i \times \frac{\partial \mathbf{d}_i}{\partial s}. \quad (3)$$

В связи с тем, что базис $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$ естественный для внутреннего описания деформаций, разложим все векторы в нем:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(s, t) &= \sum_{i=1}^3 v_i(s, t) \mathbf{d}_i(s, t), & \mathbf{u}(s, t) &= \sum_{i=1}^3 u_i(s, t) \mathbf{d}_i(s, t), \\ \mathbf{w}(s, t) &= \sum_{i=1}^3 w_i(s, t) \mathbf{d}_i(s, t). \end{aligned} \quad (4)$$

2. Параметризация матрицы поворота. Ориентация подвижной системы координат $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$ в произвольном сечении s по отношению к неподвижной системе координат $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ может быть определена тремя последовательными поворотами, называемыми углами Эйлера. Однако ранее было доказано [7], что свободные от сингулярности уравнения поворота не могут быть получены при использовании трех независимых переменных. Существуют и другие пути описания поворотов, не столь интуитивно очевидные, но более пригодные для численного решения задач. Рассмотрим удобный для численных расчетов метод кватернионов Гамильтона. Для этого используем четыре компоненты кватерниона $\mathbf{q} = \mathbf{q}(s, t) = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ в качестве обобщенных координат для параметризации матрицы поворота $\mathbf{D}(s, t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(s, t) &= [\mathbf{d}_1(\mathbf{q}), \mathbf{d}_2(\mathbf{q}), \mathbf{d}_3(\mathbf{q})] = \\ &= \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2q_1q_2 - 2q_3q_4 & 2q_1q_3 + 2q_2q_4 \\ 2q_1q_2 + 2q_3q_4 & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2q_2q_3 - 2q_1q_4 \\ 2q_1q_3 - 2q_2q_4 & 2q_2q_3 - 2q_1q_4 & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя выражения для единичных векторов из (5) в (3), получаем компоненты деформации в связанной системе координат

$$\begin{aligned} u_1 &= 2(q_1q'_4 + q_2q'_3 - q_3q'_2 + q_4q'_1), \\ u_2 &= 2(-q_1q'_3 - q_2q'_4 + q_3q'_1 + q_4q'_2), \\ u_3 &= 2(q_1q'_2 - q_2q'_1 - q_3q'_4 + q_4q'_3). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь штрих – производная по дуговой координате.

Аналогично получим проекции угловой скорости в связанной системе координат

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2(q_1\dot{q}_4 + q_2\dot{q}_3 - q_3\dot{q}_2 + q_4\dot{q}_1), \\ \omega_2 &= 2(-q_1\dot{q}_3 - q_2\dot{q}_4 + q_3\dot{q}_1 + q_4\dot{q}_2), \\ \omega_3 &= 2(q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1 - q_3\dot{q}_4 + q_4\dot{q}_3). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь точка – производная по времени.

Для задания начальных условий необходимы формулы, связывающие компоненты кватернионов с углами Эйлера:

$$\begin{aligned} q_1 &= \sin(\theta/2)\cos((\phi - \psi)/2), & q_2 &= \sin(\theta/2)\sin((\phi - \psi)/2), \\ q_3 &= \cos(\theta/2)\sin((\phi + \psi)/2), & q_4 &= \cos(\theta/2)\cos((\phi + \psi)/2). \end{aligned} \quad (8)$$

Компоненты в (8) нормированы $\sum_m q_m^2 = 1$.

3. Уравнения движения. Располагая локальную ортогональную систему единичных векторов ($\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$) в конечном числе точек, получим модель стержня в виде цепочки жестких фрагментов, соединенных упругими шарнирами. Для этого производные по дуговой координате заменим конечными разностями вида

$$q' = \frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta s}, \quad q'' = \frac{\frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta s} - \frac{q_i - q_{i-1}}{\Delta s}}{\Delta s} = \frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{\Delta s^2},$$

где Δs – шаг дискретизации.

Свяжем с каждым стержнем модели локальную ортогональную систему единичных векторов ($\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$). Положение каждого стержня в некоторой неподвижной системе координат ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) будем задавать радиус-вектором центра масс стержня $\mathbf{r}_C(s, t) = r_C(s, t)\mathbf{e}_1 + y_C(s, t)\mathbf{e}_2 + z_C(s, t)\mathbf{e}_3$. Ориентацию каждой локальной системы координат ($\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$) относительно неподвижной системы координат ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) будем рассчитывать с помощью компонентов кватерниона $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t) = (q_1, q_2, q_3, q_4)$.

Составим для модели систему из $4n$ уравнений Лагранжа второго рода со множителями (следуя методу неопределенных множителей Лагранжа):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{\alpha} \frac{\partial \Omega_{\alpha}}{\partial q_k} \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (9)$$

Однако положение каждого из фрагментов модели определяется тремя независимыми обобщенными координатами. Следовательно, для каждого стержня имеется одна зависимая обобщенная координата. Будем полагать, что на обобщенные координаты, определяющие положение каждого стержня, наложена дополнительная голономная связь:

$$\Omega_{\alpha} = (q_1(\alpha))^2 + (q_2(\alpha))^2 + (q_3(\alpha))^2 + (q_4(\alpha))^2 - 1 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n), \quad (10)$$

которая, фактически, является условием выполнения нормы кватерниона для каждого фрагмента стержня модели. Уравнения (9) совместно с s уравнениями связей (10) служит для определения $4n + s$ неизвестных величин: $q_1(1), q_2(1), \dots, q_4(1), q_1(2), \dots, q_4(2), \dots, q_1(n), \dots, q_4(n), \lambda_1, \dots, \lambda_n$. Множители

Лагранжа здесь не имеют физического смысла, но их равенство нулю говорит о правильности вычислений.

Кинетическая энергия рассматриваемой системы определяется по формуле

$$T = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} m_k v_{Ck}^2 + \frac{1}{2} \left(J_{1k}^C \omega_{1k}^2 + J_{2k}^C \omega_{2k}^2 + J_{3k}^C \omega_{3k}^2 \right) \right), \quad (11)$$

где $\omega_{xk}, \omega_{yk}, \omega_{zk}$ – проекции угловой скорости на оси подвижной системы координат, связанной с телом, $J_{1k}^C, J_{2k}^C, J_{3k}^C$ – динамические моменты инерции фрагментов, которые являются цилиндрами.

Так как каждый фрагмент стержня представляет собой тело вращения, то кинетическая энергия принимает вид

$$T = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} m_k v_{Ck}^2 + \frac{1}{2} \left(J_{1k}^C (\omega_{xk}^2 + \omega_{yk}^2) + J_{3k}^C \omega_{zk}^2 \right) \right). \quad (12)$$

Координаты центров масс фрагментов стержней в неподвижной системе координат определим следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{Ck} &= \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{d}_3(\mathbf{q})_i)_x \Delta s = \sum_{i=1}^{k-1} l_i (2q_1^i q_3^i + 2q_2^i q_4^i) + \frac{1}{2} l_k (2q_1^k q_3^k + 2q_2^k q_4^k), \\ y_{Ck} &= \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{d}_3(\mathbf{q})_i)_y \Delta s = \sum_{i=1}^{k-1} l_i (2q_2^i q_3^i - 2q_1^i q_4^i) + \frac{1}{2} l_k (2q_2^k q_3^k - 2q_1^k q_4^k), \\ z_{Ck} &= \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{d}_3(\mathbf{q})_i)_z \Delta s = \sum_{i=1}^{k-1} l_i \left(-(q_1^i)^2 - (q_2^i)^2 + (q_3^i)^2 + (q_4^i)^2 \right) + \\ &\quad \frac{1}{2} l_k \left(-(q_1^k)^2 - (q_2^k)^2 + (q_3^k)^2 + (q_4^k)^2 \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где l_i, l_k – длина i -го и k -го стержня соответственно.

Скорость центров масс фрагментов стержней получим дифференцированием выражений для координат центров масс (13)

$$v_{Ck}^2 = \dot{x}_{Ck}^2 + \dot{y}_{Ck}^2 + \dot{z}_{Ck}^2. \quad (14)$$

Потенциальная энергия системы состоит из энергии в поле сил тяжести и энергии упругих связей между фрагментами стержня.

Потенциальная энергия упругих связей имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=2}^n c_{jk} \left(u_{jk} - u_{jk}^0 \right)^2, \quad (15)$$

где c_{jk} – жесткости упругих связей, u_{jk}^0 – компоненты деформации, соответствующие естественной кривизне стержня.

Жесткости на изгиб определяем по формуле $c_{1k} = c_{2k} = EJ/l_k$, а жесткость на кручение – $c_{3k} = GJ/l_k$.

Потенциальная энергия в поле сил тяжести:

$$\Pi = \sum_{k=1}^n g m_k z_{Ck}, \quad (16)$$

где g – ускорение свободного падения, m_k – масса k -го фрагмента стержня, z_{Ck} – вертикальная координата центра масс k -го фрагмента стержня.

Введем силу сопротивления, действующую на каждый фрагмент стержня, пропорциональную первой степени скорости его центра масс $\mathbf{F}_k = -\beta \mathbf{v}_{Ck}$. При линейной зависимости силы сопротивления от скорости для вычисления обобщенной силы сопротивления удобно ввести диссипативную функцию Релея Φ :

$$\Phi = \sum_{k=1}^n \beta_k \frac{v_{Ck}^2}{2}, \quad (17)$$

где β_k – коэффициент пропорциональности.

Тогда обобщенная сила сопротивления примет вид

$$Q_k = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_k}. \quad (18)$$

Полученные уравнения движения здесь не выписывались ввиду их чрезвычайной громоздкости.

4. Интегрирование уравнений движения. В качестве практического примера применения предложенной модели гибкого стержня рассмотрим падение ствола дерева переменного сечения (усеченный конус), изогнутого в одной плоскости по дуге окружности. Эффективными диаметрами для расчета жесткостей пружин и динамических характеристик фрагментов стержней принят средний диаметр каждого из фрагментов, на которые разбивался исходный стержень (разбиение проводилось на пять частей). Считалось, что сила сопротивления приложена к верхнему фрагменту стержня в соответствии с расположением кроны дерева. Полученная система уравнений (9), (10) решалась численно с помощью пакета Maple 11.

Начальное положение фрагментов стержней в пространстве задавали с помощью углов Эйлера, а затем по их значениям находили соответствующие компоненты кватернионов по формулам (8). Начальные угловые скорости вдоль каждой из осей принимали равными нулю. С учетом начальных условий записывали систему дифференциальных уравнений движения. На основании данной системы уравнений находили старшие производные компонент кватернионов при помощи метода Ньютона–Рафсона [8].

Численное интегрирование уравнений движения производили с помощью модификации базовой схемы Верле, так называемой полшаговой (*leap-frog*) схемы [6]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_i(t + \Delta t / 2) &= \dot{\mathbf{q}}_i(t - \Delta t / 2) + \ddot{\mathbf{q}}_i(t) \Delta t, \\ \mathbf{q}_i(t + \Delta t) &= \mathbf{q}_i(t) + \dot{\mathbf{q}}_i(t + \Delta t / 2) \Delta t, \end{aligned}$$

где \mathbf{q}_i – векторы компонент кватернионов.

Расчеты проводили при учете сил сопротивления. Для проверки работоспособности алгоритма моделирования расчеты были выполнены и при отсутствии сил сопротивления, когда критерий сохранения энергии системы был использован для оценки точности моделирования.

На рис. 2 представлены проекции осевой линии ствола дерева в различные моменты времени в пространственной системе координат (3D моделирование падения ствола дерева).

Выводы. В работе разработан эффективный метод, позволяющий моделировать динамическое поведение упругих стержней в трехмерном пространстве. Предложена модель, которая состоит из набора жестких фрагментов (стержней), соединенных упругими связями, позволяющими стержням изгибаться друг относительно друга в двух плоскостях и совершать крутильные движения. Повороты стержней описываются с помощью компонент кватернионов. Данный метод позволяет рассматривать динамику деформируемых стержней с различной геометрией и с различными упругими характеристиками.

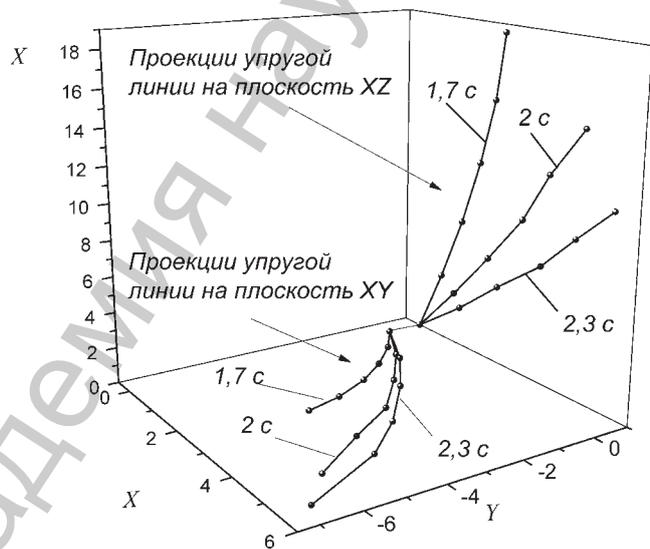


Рис. 2. Проекция осевой линии ствола дерева в различные моменты времени

В качестве примера рассмотрена динамика падения ствола дерева переменного сечения с учетом реальных условий окружающей среды. Модель позволяет получать формы осевой линии ствола дерева в произвольный момент времени, а также такие параметры, как скорость падения ствола и ударный импульс (в работе не представлены), которые необходимы в практической деятельности инженеров-конструкторов, занятых расчетами и проектированием лесных машин.

Литература

1. *Joung C. G., Phan-Thien N., Fan X. J.* // Journal of non-newtonian fluid mechanics. 2001. Vol. 99, N 1. P. 1–36.
2. *Cao D. Q., Liu Dongsheng, Charles H.-N. Wang* // International Journal of Solids and Structures. 2005. Vol. 43. P. 760–783.
3. *Wang Gang, Wei Yu, Chixing Zhou* // European Journal of Mechanics B. 2006. Vol. 25, N 3. P. 337–347.
4. *Cao D. Q., Tucker Robin W.* // International Journal of Solids and Structures. 2007. ol. 45, N 2. P. 460–477.
5. *Xiang P., Kuznetsov A. V.* // International communications in heat and mass transfer. 2008. Vol. 35, N 5. P. 529–534.
6. *Zupan E., Saje M., Zupan D.* // Comput. Methods in Appl. Mech. Engrg. 2009. Vol. 198, N 49–52. P. 3944–3956.
7. *Allen M. P., Tildesley D. J.* Computer Simulation of Liquids. Oxford.: Clarendon press, 1999.
8. *Денис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М., 1988.

S. A. BORISEVICH, A. N. KAMLUK

THREE-DIMENSIONAL MODEL OF AN ELASTIC ROD AND ITS APPLICATION FOR DYNAMICAL ANALYSIS OF THE ELASTIC TREE STEM

Summary

A rod-chain model was used to study the three-dimensional dynamics of a tree stem. A numerical method is developed for simulating the mechanical behavior of a flexible tree stem. The motion of the flexible tree stem is determined under the resistance forces exerting on the tree crown. The modeling strategy of this approach employed the exact nonlinear kinematic relationships in the sense of the Cosserat theory and the adopted Bernoulli hypothesis. A deformed configuration of the rod is described by the displacement vector centroid curves and an orthonormal moving frame rigidly attached to the cross-section of the rod. The position of the moving frame relative to the inertial frame is specified by the rotation matrix parameterized by rotational quaternions.

ФІЗІКА

УДК 52–43; 524.85:531.51

В. В. ТИХОМИРОВ, Ю. А. ЦЕЛКОВ

**ОБ УСКОРЕНИИ АККРЕЦИИ НА ПЕРВИЧНЫЕ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ
В ПРИСУТСТВИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ**

НИИ ядерных проблем БГУ

(Поступила в редакцию 23.03.2011)

Введение. В последнее время большой интерес вызывают модели многомерной гравитации, в которых наша Вселенная представляет собой 4-мерное подмногообразие – так называемый «мир на бране» (braneworld) в пространстве высшей размерности [1, 2], причем поля материи локализованы на этом подмногообразии – бране и лишь гравитация способна распространяться во всем многомерном пространстве*. Эвристический потенциал этих моделей оказался достаточно высок: так, удалось объяснить эффективную четырехмерность нашего мира, обосновать реализацию стандартной гравитации в низкоэнергетическом пределе, решить проблему иерархии в квантовой теории поля и, вместе с тем, предложить ряд новых эффектов сильной гравитации, таких как рождение микро-черных дыр и уход частиц в дополнительные пространственные измерения, проверяемых уже в ускорительных экспериментах нынешнего поколения (обзоры [3] и [4]). Принципиально новой оказалась возможность существования макроскопических и даже бесконечных дополнительных пространственных измерений [5].

Концепции мира на бране привели к пересмотру стандартной космологии, а также к модификации различных астрофизических процессов, в которых могут проявляться эффекты дополнительных пространственных измерений, что, помимо наземных экспериментов, предоставляет новый независимый источник информации, как о ранней Вселенной, так и о структуре пространства-времени. В частности, было показано, что существуют нетривиальные космологические решения, значительно отличающиеся от фридмановского на стадии радиационного доминирования в ранней Вселенной [8]. Выяснилось также, что первичные черные дыры (ПЧД), прямо связанные с развитием космологических неоднородностей, весьма чувствительны к наличию дополнительных измерений. Так, было установлено, что аккреция на ПЧД в космологии мира на бране может существенно отличаться от классической, свидетельствуя тем самым о новых возможностях по ограничению на спектр первичных возмущений [9]. Тем не менее, в отсутствие точной теории аккреции на ПЧД в космологии мира на бране приходилось ограничиваться качественными соображениями, что значительно затрудняло понимание масштаба влияния дополнительных пространственных измерений на различные процессы во Вселенной.

В данной работе будет исследоваться космологический и астрофизический аспект взаимодействия многомерных ПЧД с окружающим веществом, как на ранних стадиях эволюции Вселенной, так и в более поздние эпохи. Будет показано, как точная теория аккреции на пятимерные ПЧД в космологии мира на бране RSII [5, 8], развитая авторами в работе [10], приводит к существенному ужесточению ограничений на начальные распространенности ПЧД. Также

* Вопрос о корректности подобной феноменологии был поставлен еще в 1983 году [6], в последнее же время модели мира на бране были открыты вновь как фундаментальные следствия теории суперструн и 11-мерной M-теории [7].

будет показано, что шестимерные ПЧД в простейшей модели мира на бране ADD [1] с плоским фоновым пространством могут эффективно захватываться плотными звездами-белыми карликами, что приводит к их быстрому поглощению, сопровождаемому катастрофической вспышкой, впервые предсказанной в работе [11], позволяющей таким образом предложить новый способ обнаружения дополнительных пространственных измерений.

1. Пятимерные ПЧД в ранней космологии модели RSII. Геометрия модели мира на бране RSII представляет собой сшивку Z_2 -симметричных бесконечных областей 5-мерного пространства анти-де-Ситтера – однородного пространства постоянной отрицательной кривизны с радиусом l , причем 4-брана нашей Вселенной располагается в месте сшивки [5]. Космологические уравнения для данной модели содержат нестандартный вклад, квадратичный по плотности энергии вещества, что приводит к существованию особой высокоэнергетической стадии на раннем этапе космологической эволюции с модифицированным поведением масштабного фактора для ультрарелятивистского уравнения состояния: $a \sim t^{1/4}$ (вместо $a \sim t^{1/2}$ в 4-мерном случае) [8].

Скорость аккреции излучения с плотностью энергии $\rho(t)$ на D -мерную ПЧД можно представить в виде

$$\frac{dM}{dt} = F \pi r_{\text{eff}}^2 \rho(t), \quad (1)$$

где $r_{\text{eff}} = \left(\frac{D-1}{2}\right)^{1/(D-3)} \left(\frac{D-1}{D-3}\right)^{1/2} r_g$ – эффективный радиус захвата частиц или критический радиус нулевых геодезических, зависящий от размерности пространства-времени D , r_g – гравитационный радиус. Для 5-мерной незаряженной и невращающейся ПЧД с массой M в модели RSII имеем:

$$r_g = \sqrt{\frac{8}{3\pi} \frac{l}{l_4} \frac{M}{M_4}} l_4, \quad (2)$$

где l_4, M_4 – четырехмерные планковские длина и масса соответственно.

Существенной характеристикой аккреции на многомерные ПЧД является безразмерный параметр F в (1) – коэффициент аккреционной эффективности, впервые введенный в работах [9, 10]. С учетом выражений для соответствующих величин уравнение (1) легко интегрируется и для ПЧД с начальной массой M_i , образовавшихся в момент времени t_i рост массы в течение высокоэнергетической фазы 5-мерной космологии принимает вид

$$M(t) = M_i \left(\frac{t}{t_i}\right)^{2F/\pi}. \quad (3)$$

Очевидно, что рост масс ПЧД критически зависит от точного значения параметра F . Напомним, что в стандартной космологии рост масс незначителен и в хорошем приближении $M(t) \sim M_i$. Это обстоятельство неоднократно подчеркивалось в литературе, указывалось на важность точного значения этого параметра, подчеркивалось, что значение $F = 1$ соответствует приближению геометрической оптики в случае бесстолкновительной аккреции [12], и что «неопределенность в его точном значении приводит к существенной неопределенности в аккреционном росте ПЧД на высокоэнергетической стадии», утверждалось также, что «его невозможно точно вычислить» [9].

Тем не менее, в работе [10] нами было обосновано применение гидродинамического приближения для аккреции ультрарелятивистской плазмы на 5-мерные ПЧД, исследованы уравнения релятивистской гидродинамики и получено точное значение параметра аккреционной эффективности:

$$F = \frac{8}{3\sqrt{3}} \approx 1,54. \quad (4)$$

Это, в свою очередь, позволяет пересмотреть существующие [12–14] и получить новые, более жесткие ограничения на начальную распространенность ПЧД в космологии мира на бране [10, 15].

Основной параметр, контролирующий эволюцию популяции ПЧД, есть отношение

$$\alpha_t(M_i) \equiv \frac{\rho_{\text{РВН},M_i}(t)}{\rho_{\text{rad}}(t)} \quad (5)$$

плотности энергии, заключенной в ПЧД с начальной массой M_i , к плотности энергии излучения в момент t . Накладывая наблюдательные ограничения на распространенность ПЧД (5) в момент времени t , основываясь на каком-либо процессе взаимодействия ПЧД и окружающей материи, можно реконструировать начальную распространенность ПЧД $\alpha_i(M_i)$, отнесенную ко времени их формирования:

$$\alpha_t(M_i) = \alpha_i(M_i) \frac{M(t_c) a(t)}{M_i a(t_i)}, \quad (6)$$

где $t_c = \frac{t_4 l}{2 l_4}$ – время окончания стадии высокоэнергетической аккреции, после которой эволюция Вселенной переходит в обычный фридмановский режим (при этом рост масс ПЧД, как было сказано, становится незначительным), t_4 – четырехмерное планковское время.

Основным процессом, определяющим изменение популяции ПЧД при $t > t_c$, становится хингговское излучение, способное к сильному воздействию на окружающую среду, а наиболее эффективно проявляют себя те ПЧД, которые испаряются в заданную эпоху. Время жизни 5-мерной ПЧД до полного испарения имеет вид:

$$t_{\text{ev}} \approx \frac{t_4 l}{0,0024g l_4} \left(\frac{M(t_c)}{M_4} \right)^2, \quad (7)$$

где g – эффективное число сортов частиц, испускаемых ПЧД на брану* [16].

Проиллюстрируем теперь, как можно получить ограничения на начальную распространенность из наблюдаемого спектра диффузных гамма-квантов [10]. Полагая в (7) $t_{\text{ev}} \approx 13,6$ млрд лет, получим массу в конце фазы активной аккреции $M(t_c)$ в зависимости от радиуса кривизны l , а из (3) – начальную массу. Входящее в (6) отношение масштабных факторов есть

$$\frac{a(t_{\text{ev}})}{a(t_i)} = \left(\frac{t_c}{t_i} \right)^{1/4} \left(\frac{t_{\text{ev}}}{t_c} \right)^{1/2}, \quad \text{если } t_{\text{ev}} < t_{\text{eq}}, \quad (8)$$

$$\frac{a(t_{\text{ev}})}{a(t_i)} = \left(\frac{t_c}{t_i} \right)^{1/4} \left(\frac{t_{\text{eq}}}{t_c} \right)^{1/2} \left(\frac{t_{\text{ev}}}{t_{\text{eq}}} \right)^{2/3}, \quad \text{если } t_{\text{ev}} > t_{\text{eq}}, \quad (9)$$

где $t_{\text{eq}} \approx 5 \cdot 10^4$ лет – момент равновесия вещества и излучения.

Извлекаемое из наблюдений гамма-квантов ограничение на текущее значение $\alpha_t(M_i)$ удобнее связать с непосредственно измеряемой величиной – фотометрической поверхностной яркостью излучения $I(E)$. Верхняя граница для $\alpha_t(M_i) = \alpha_{\text{ev}}$ будет соответствовать предположению, что фон наблюдаемых гамма-квантов произведен ПЧД, испаряющимися в нашу эпоху. В этом случае можно записать

$$I(E) = \frac{c M^* c^2}{4\pi E} n(t_{\text{ev}}, M_i(M^*)), \quad (10)$$

где $M^* = M(t_c)$, n – концентрация ПЧД в эпоху испарения, вычисленная с учетом эволюции масштабного фактора (8)–(9), а $E \sim 5T_{bh}$ – энергия гамма-квантов, излучаемых ПЧД с температурой $T_{bh} = \frac{D-3}{4\pi r_g}$. $I(E)$ связано с α_{ev} посредством соотношения $n(t_{\text{ev}}, M_i(M^*)) = \alpha_{\text{ev}} \frac{\rho_{\text{rad}}(t_{\text{ev}})}{M(t_c)}$.

* ПЧД излучает в основном на брану, излучение вне браны определяется числом поляризационных состояний 5-мерных гравитонов – $g_{\text{out}} = D(D-3)/2$, для $D = 5$ имеем $g > g_{\text{out}}$ [16, 17].

В результате, используя свойства космологической эволюции плотности числа ПЧД $n(t_{ev}, M_i(M^*))$ и учитывая аккреционный рост масс (3)–(4), можно связать пиковое значение I_{peak} спектра $I(E)$ на энергии, соответствующей излучению гамма-квантов ПЧД, испаряющихся в нашу эпоху, с начальной распространенностью α_i и радиусом кривизны дополнительного измерения l :

$$I_{peak} \propto \alpha_i(M_i) l^{-1/16+3\tilde{F}/2}, \quad (11)$$

где $\tilde{F} \equiv 9F / (8\pi - 8F)$.

Результаты сопоставления (11) с экспериментальными данными, приведенными в работе [12], представлены на рис. 1 [10], из которого видно, что пятимерные ПЧД с учетом точной теории аккреции ведут к значительному ужесточению ограничений на их распространенность по сравнению с предшествующими выводами [12, 13] (напомним, что в стандартной космологии $\alpha_i < 10^{-27}$).

Еще одно жесткое ограничение можно получить из анализа остаточных степеней ионизации водорода x_H хоккингским излучением ПЧД при больших красных смещениях, что влияет как на распространение излучения, так и на формирование звезд третьего поколения при $z \approx 20$. Известно, что $x_H < 10^{-4}$ [18].

Для оценки массовой доли ПЧД, способных произвести подобную ионизацию, напомним, что часть $A \approx 0,7$ от энергии хоккингского излучения может быть преобразована в эффективно ионизирующее мягкое рентгеновское излучение и низкоэнергетические электроны при $z < 1100$. Такая конверсия реализуется как при воздействии на достаточно плотный водород при красных смещениях $150 < z \leq 1100$, так и внутри звезд третьего поколения.

Учитывая связь между барионной и фотонной плотностями энергий и полагая, что на ионизацию H идет ~ 100 эВ, найдем для верхней границы $\alpha(t_{ev})$:

$$\alpha(t_{ev}) \approx x_H \frac{100 \text{ эВ} \rho_{bar}(t_{ev})}{A m_p c^2 \rho_{rad}(t_{ev})} \approx \frac{1,2 \times 10^{-8}}{1 + z_{ev}}, \quad (12)$$

где m_p – масса протона. Подставляя (12) в (6) с учетом (3), (4) и (7)–(9) получим, что максимальные ограничения, получаемые в этом случае ($\alpha_i < 10^{-42}$), более чем на 10 порядков ужесточают стандартный четырехмерный результат ($\alpha_i < 10^{-29}$).

Подобным образом можно получить ограничения для ПЧД из различных эпох и на основании различных процессов, начиная от эпохи первичного нуклеосинтеза. Результаты приведены в таблице [10, 15].

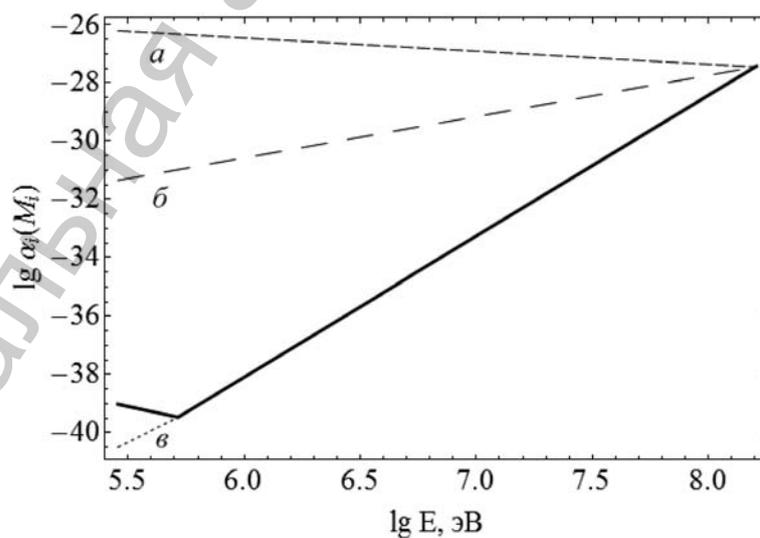


Рис. 1. Ограничения на начальную распространенность ПЧД на основании спектра космического диффузного гамма-фона: $a - F = 0,5$, $b - F = 1$, $v - F = 1,54$

Таблица. Ограничения при $l = l_{\min}, l_{\max}$ и максимальное ограничение при $l = l^*$

Источник ограничений	Логарифм из:					
	$\alpha_i(l_{\max})$	l_{\min}/l_4	$\alpha_i(l_{\min})$	l^*/l_4	$\alpha_i(l^*)$	$\alpha_i(4D)$
Полная плотность материи	-30	20	-18	30	-31	-18
Диффузный гамма-фон	-39	20	-27	30	-40	-27
Избыток антипротонов	-35	20	-28	30	-36	-29
Распад дейтерия при 400 с	-27	15	-21	21	-29	-18
Распад дейтерия при 10^8 с	-29	17	-20	24	-30	-19
Распад дейтерия при 10^{13} с	-30	18	-19	27	-31	-20
Распространенность He	-27	14	-17	19	-26	-18
Спектр СМВ при $z = 2 \cdot 10^6$	-30	17	-21	24	-31	-21
Спектр СМВ при $z = 1100$	-34	18	-23	27	-34	-21
Ионизация H при $z = 1100$	-41	18	-30	27	-42	-29
Ионизация H при $z = 20$	-42	19	-29	29	-42	-29

Как видно, ограничения на распространенность ПЧД, вытекающие из модели RSII, на много порядков ниже аналогичных в случае стандартной космологии, представленных в последнем столбце таблицы, что указывает на необходимость пересмотра спектра первичных флуктуаций, ответственных за образование космических структур.

2. Захват и поглощение многомерными первичными черными дырами плотных небесных тел. В качестве альтернативного космологическому источнику информации о влиянии дополнительных измерений в моделях мира на бране можно рассматривать особенности взаимодействия многомерных ПЧД с плотными небесными телами. Этому способствуют свойства многомерных ПЧД, обладающих более сильным гравитационным полем, усиливающим аккрецию материи на них, что приводит к большему торможению в веществе плотных небесных тел и в результате к более эффективному захвату. По этим причинам поглощение небесных тел первичными черными дырами, имеющее наблюдаемые следствия, можно рассматривать как метод поиска ПЧД. Напомним, что такой метод использовался во многих работах, начиная с пионерских [19–22].

С точки зрения эффективности поглощения вещества черными дырами наиболее предпочтительны объекты с наибольшей возможной средней плотностью. Белые карлики (БК) являются объектами достаточно плотными, успевающими поглотиться стандартными четырехмерными ПЧД за хаббловское время [11].

Отметим, что в последнее время широко обсуждалась экзотическая возможность, предоставляемая моделями мира на бране, образования микро-черных дыр в ускорителях и космических лучах, причем высказывались даже опасения об угрозе поглощения Земли [23]. Последнее обстоятельство ставит вопрос о стабильности небесных тел по отношению к поглощению их многомерными микро-ЧД из космических лучей, который рассматривался в работе [23], однако проблема поглощения плотных небесных тел многомерной ПЧД не исследована до сих пор.

Рассмотрим поглощение БК в простейшей модели мира на бране ADD с плоским фоновым пространством [1]. Если D -мерная планковская масса, входящая в гравитационное действие, соответствует масштабу электрослабых взаимодействий $M_D \approx 1$ ТэВ, то пространство с $D = 5$ будет оказывать ощутимое воздействие уже в рамках классической небесной механики, и с такими параметрами эта модель не приемлема. При ненулевой кривизне в 5-мерном объеме, однако, возможны допустимые экспериментом решения, в частности, представленные в предыдущем разделе. Соответственно, рассмотрим теперь следующий допустимый вариант шестимерных ПЧД в моделях с плоскими дополнительными измерениями.

Хокинговская масса таких ПЧД, способных сохраниться до нашей эпохи, на момент их образования определяется выражением для времени полного испарения с учетом возраста Вселенной 13,7 млрд лет:

$$M_{\text{Haw}} = (6,22 \cdot 10^{41})^{\frac{(D-3)}{(D-1)}} M_D^{\frac{2(D-2)}{D-1}} \text{ ГэВ}. \quad (13)$$

Для $D = 6$ и $M_D = 1$ ТэВ получим $M_{\text{Haw}} \approx 10^3$ кг (аналогичные 4-D ПЧД имеют массы $M_{\text{Haw}} \approx 10^{12}$ кг). Процесс поглощения БК первичной ЧД естественно разделить на две стадии.

Первая соответствует аккреционному росту массы ПЧД с начального значения $M_{\text{Нав}}$ вплоть до выхода из режима многомерной аккреции, когда радиус Бонди, характеризующий аккрецию $R_B \sim r_g(M)$ сопоставим со значением размера дополнительных измерений $L = M_D^{-1}(M_4 / M_D)^{2/(D-4)}$. Тогда продолжительность этой стадии будет [23]

$$t_{acD} = d_0 \frac{4c_s(\infty)}{(D-5)\lambda_D k_D} \left(\frac{M_D}{1 \text{ TeV}} \right)^{(D-2)/(D-4)} \left(\frac{M_4}{1 \text{ TeV}} \right)^{2(D-5)/(D-4)}, \quad D > 5, \quad (14)$$

где $c_s(\infty)$ – скорость звука в веществе БК, не возмущенном присутствием первичной черной дыры, $\lambda_D, k_D = \text{const}$ для данного D . В (14) введено характеристическое расстояние: $d_0 = \frac{(1 \text{ TeV})^3}{\pi \rho}$, ρ – средняя плотность БК.

Следующая временная шкала характеризует продолжительность четырехмерного аккреционного режима, начинающегося с выхода из шестимерной аккреции при $R_B > L$ и продолжающегося до полного поглощения БК [23]:

$$t_{ac4} = d_0 \frac{4c_s(\infty)}{\lambda_4 k_4} \left(\frac{M_4}{1 \text{ TeV}} \right)^2 \left(\frac{1}{1 \text{ TeV } R_{B0}} \right), \quad D = 4, \quad (15)$$

где R_{B0} – начальный радиус Бонди, связанный с начальной массой ПЧД $M_{\text{Нав}}$.

Из соотношений (14) и (15) можно установить, что временная шкала t_{ac4} превосходит t_{acD} во всем диапазоне плотностей БК. Интересно сравнить максимальную временную шкалу, возникающую при поглощении БК шестимерной первичной черной дыры с соответствующими значениями в случае отсутствия дополнительных пространственных измерений [11]. Временная шкала полного поглощения БК в четырехмерном и шестимерном случаях изображена на рис. 2. Можно видеть, что в случае присутствия дополнительных пространственных измерений время поглощения БК существенно ниже.

Поэтому наблюдаемый факт широкой распространенности и стабильности плотных космических объектов, таких как БК, является еще одним аргументом относительно как безопасности ускорительных экспериментов, так и стабильности небесных тел по отношению к поглощению многомерными микро-ЧД или ПЧД. Эти результаты независимо подтверждают выводы, сделанные в работе [23], и свидетельствуют о необходимости наложения новых ограничений на параметры моделей мира на бране или на распространенность 6-мерных ПЧД.

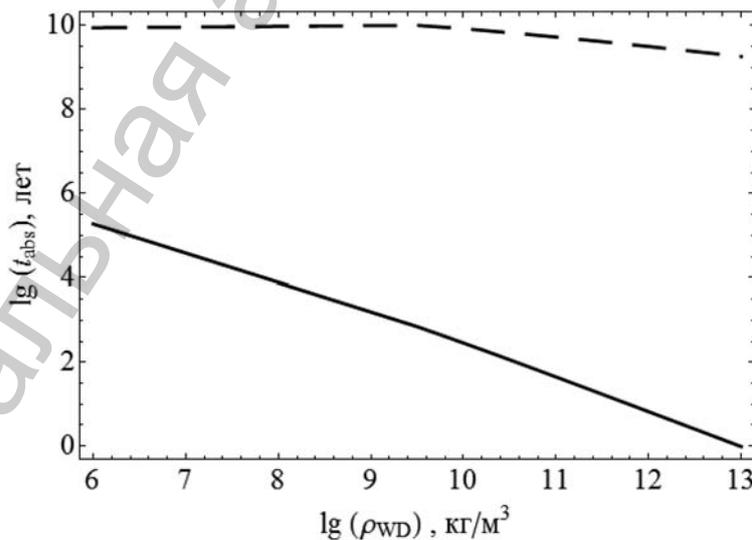


Рис. 2. Время полного поглощения БК первичной ЧД в шестимерном (сплошная линия) и в четырехмерном (пунктир) случаях в зависимости от центральной плотности БК

Учитывая факт быстрого поглощения 6-мерной ПЧД белого карлика, исследуем вопрос о захвате им ПЧД и получим соответствующие ограничения на вклад 6-мерных ПЧД в плотность скрытой массы на основании известной статистики распространенности БК в Галактике. Для этого, считая, что ПЧД и БК имеют максвелловское распределение $f(v, \sigma)$ по скоростям $v = |\vec{v}|$ с дисперсией σ , и учитывая, что типичный БК с массой M_{WD} имеет плотность $\rho_{WD} = 10^9$ кг/м³ и радиус $R_{WD} = 10^7$ м, оценим скорость захвата ПЧД:

$$\Gamma(v_{WD}) = \int d^3\vec{v} f(v, \sigma_{BH}) \pi b^2 |\vec{v} - \vec{v}_{WD}|, \quad (16)$$

где b – прицельный параметр, $\vec{v} - \vec{v}_{WD}$ – относительная скорость ЧД-БК при межзвездном расстоянии около 1 пк. Законы сохранения дают: $b^2 = \frac{2G_4 M_{WD} R_{WD}}{|\vec{v} - \vec{v}_{WD}|^2}$, где G_4 – 4-мерная гравитационная постоянная. Введя значение $E_{av} = 3 \frac{M(\sigma_{BH}^2 + \sigma_{WD}^2)}{2}$ средней относительной кинетической энергии на больших расстояниях и интегрируя (16) по скоростям ПЧД, удовлетворяющим условию захвата $\frac{M(\vec{v} - \vec{v}_{WD})^2}{2} < |\Delta E|$, где ΔE – энергия, теряемая ПЧД при прохождении БК, получим после усреднения по гауссовому распределению:

$$\langle \Gamma \rangle = 3\sqrt{2\pi} G_4 M_{WD} R_{WD} \frac{1}{\sqrt{\sigma_{BH}^2 + \sigma_{WD}^2}} \frac{|\Delta E|}{E_{av}}. \quad (17)$$

Ключевой момент проводимого анализа заключается в том, что малое значение ΔE в четырехмерной гравитации позволяет только ПЧД с массами $M > 10^{26}$ кг быть захваченными БК и другими небесными телами. Покажем, что в присутствии дополнительных измерений ситуация радикально меняется. Напомним, что ПЧД тормозятся как вследствие прямой передачи энергии окружающей среде, так и вследствие роста массы в процессе аккреции. Потеря кинетической энергии ПЧД на единицу длины пройденного пути вследствие роста массы есть

$$\frac{dE_{abs}}{dz} = \frac{E}{v} \frac{dM}{dt} \quad (18)$$

и она прямо связана с скоростью массовой аккреции $\frac{dM}{dt} = \lambda_D \pi R_{B^2}^2 c_s(\infty) \rho(\infty)$.

Более сильная радиальная зависимость гравитационных сил значительно усложняет вычисление тормозных потерь при прямой передаче энергии dE_{tr} / dz в случае $D > 4$. Основной вклад в потери энергии ПЧД происходит на малых расстояниях, лишь немного превосходящих масштаб поглощения материи b_{abs} . При этом не возникает усиливающего логарифмического фактора, как в случае $D = 4$, что делает сравнимыми оба механизма торможения ПЧД.

На данном этапе ограничимся простой оценкой энергетических потерь dE_{tr} / dz , вычисляя локальную скорость, приобретаемую окружающей ПЧД материей в импульсном приближении и интегрируя соответствующую плотность кинетической энергии вещества по области $R > b_{abs}$. Значение b_{abs} тогда находится при уравнивании полученной веществом скорости и скорости

ЧД: $\Delta v_{\perp} = \frac{4 G_4 M_{BH} m}{3 v_{BH}} \frac{R_D^{D-4}}{b_{abs}^{D-3}} = v_{BH}$. Отсюда для потерь энергии получим:

$$\frac{dE_{tr}}{dz} = \pi \rho \int_{b_{min}}^{\infty} (\Delta v_{\perp})^2 b db = \pi \rho \frac{4}{3} \left(\frac{G_4 M_{BH}}{v_{BH}} \right)^2 \frac{R_D^{2(D-4)}}{2(D-4) b_{abs}^{2(D-4)}}. \quad (19)$$

Наконец, для установления соответствующих ограничений на распространенности ПЧД в рассматриваемой модели с шестимерной гравитацией, подставим значение общей потери энергии при единичном прохождении БК (18) и (19)

$$\Delta E \approx \left(\frac{dE_{\text{abs}}}{dz} + \frac{dE_{\text{tr}}}{dz} \right) R_{\text{WD}} \quad (20)$$

в среднюю скорость захвата (17). Отсюда можно окончательно получить вероятность захвата ПЧД всеми БК Галактики [24]:

$$P_{\text{capt}} = 2\pi \langle \Gamma \rangle \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dR R n_{\text{BH}}(R, z) n_{\text{WD}}(R, z) \approx 4 \cdot 10^{16} \Omega_{\text{PBH}} \left(\frac{10^3 \text{ kg}}{M} \right) \frac{|\Delta E|}{E_{\text{av}}} \text{ год}^{-1}. \quad (21)$$

Напомним, что поглощение БК первичной ЧД может наблюдаться посредством сопровождающейся нейтринной вспышки [11]. Будем исходить из возможности, что мегатонные водные нейтринные детекторы вскоре будут в состоянии надежно детектировать такую вспышку на уровне один раз в десять лет из всей Галактики. В этом случае можно получить зависимость массовой доли обнаруженных шестимерных ПЧД от шестимерной массы Планка, что изображено на рис. 3.

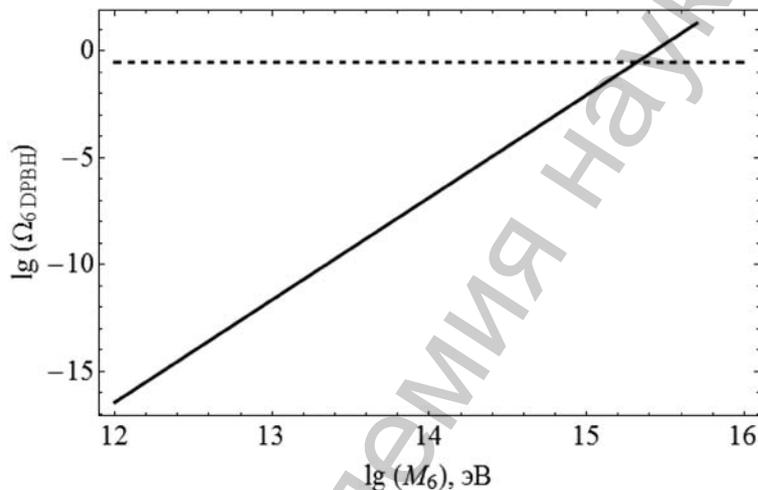


Рис. 3. Ограничение на долю вклада шестимерных ПЧД в среднюю плотность вещества в зависимости от фундаментального масштаба гравитации. Пунктирная горизонтальная линия соответствует вкладу скрытой массы $\Omega_{\text{DM}} = 0,3$

Заключение. Показано, что точная теория аккреции ультрарелятивистской плазмы на пятимерные ПЧД в космологии мира на бране RSII приводит к существенному ужесточению ограничений на начальные распространенности ПЧД. Также показано, что шестимерные ПЧД в простейшей модели мира на бране ADD с плоским фоновым пространством могут эффективно захватываться плотными звездами-белыми карликами, что приводит к их быстрому поглощению, позволяющему оценить среднюю плотность популяции ПЧД на уровне $\Omega_{\text{PBH}} \sim 10^{-16}$ при минимально возможной шестимерной массе Планка $M_6 = 1$ ТэВ и массе ПЧД $M_{\text{PBH}} \sim 1$ т. При этом шкала астрофизических ограничений на параметры модели мира на бране эффективна вплоть до $M_6 < 10^3$ ТэВ.

Литература

1. Antoniadis I., Arkani-Hamed N., Dimopoulos S., Dvali G. R. // Phys. Lett. 1998. Vol. B436. P. 257–263.
2. Randall L., Sundrum R. // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83. P. 3370–3373.
3. Perez-Lorenzana A. // J. Phys. Conf. Ser. 2005. Vol. 18. P. 224–269.
4. Maartens R. // Living Rev. Rel. 2004. Vol. 7. P. 7.
5. Randall L., Sundrum R. // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83. P. 4690–4693.
6. Rubakov V. A., Shaposhnikov M. E. // Phys. Lett. 1983. Vol. B125. P. 136–138.
7. Horava P., Witten E. // Nucl. Phys. 1996. Vol. B475. P. 94–114.
8. Cline J. M., Grojean C., Servant G. // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83. P. 4245.
9. Guedens R., Clancy D., Liddle A. R. // Phys. Rev. 2002. Vol. D66. P. 083509; Majumdar A. S. // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 90. P. 031303.

10. *Tikhomirov V. V., Tsalkou Y. A.* // Phys. Rev. D. 2005. Vol. 72. P. 121301 (R).
11. *Tikhomirov V. V., Stahlo S. E.* // Grav. Cosmol. 2005. Vol. 11. P. 229–234.
12. *Sendouda Y., Nagataki S., Sato K.* // Phys. Rev. D. 2003. Vol. 68, N 10. P. 103510.
13. *Clancy D., Guedens R., Liddle A. R.* // Phys. Rev. 2003. Vol. D68. P. 023507.
14. *Sendouda Y., Kohri K., Nagataki S., Sato K.* // Phys. Rev. 2005. Vol. D71. P. 063512.
15. *Tikhomirov V. V., Tsalkou Y. A.* // Gravitation & Cosmology. 2006. Vol. 12. P. 231–234.
16. *Guedens R., Clancy D., Liddle A. R.* // Phys. Rev. 2002. Vol. D66. P. 043513.
17. *Empanan R., Horowitz G. T., Myers R. C.* // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85. P. 499–502.
18. *Насельский П. Д.* // Письма в Астрон. Журн. 1978. Т. 4. С. 387.
19. *Hawking S.* // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1971. Vol. 152. P. 75.
20. *Picchio G.* // Astron. Astrophys. 1981. Vol. 99. P. 31–35.
21. *Тихомиров В. В., Юралевиц С. Э.* // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук, 2001, № 4, С. 73–78.
22. *Tikhomirov V. V., Malyshchits V. V.* // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2007. Vol. 10:3. P. 303–308.
23. *Giddings S. B., Mangano M. L.* // Phys. Rev. 2008. Vol. D78. P. 035009.
24. *Ignatenko V. I., Tikhomirov V. V., Tsalkou Y. A.* // Proceedings of the International conference in honor of Ya. B. Zel'dovich 95th Anniversary «The sun, the stars, the universe and general relativity», April 20–23, Minsk 2009. / AIP Conference Series; Editors: R. Ruffini [et al.], 2009. P. 97–102.

V. V. TIKHOMIROV, Y. A. TSALKOU

**ACCELERATION OF ACCRETION ONTO PRIMORDIAL BLACK HOLES
IN THE PRESENCE OF EXTRA DIMENSIONS**

Summary

It is shown that an increase of an accretion rate on a primordial black hole (PBH) leads to much tighter constraints on an initial PBH mass fraction in the 5-dimensional RSII one-brane cosmology imposed by different astrophysical processes, starting from the primordial nucleosynthesis epoch.

It is also concluded that a drastic modification of PBH properties in the extra dimension presence in the ADD-model allows these PBHs to decelerate fast and become captured by white dwarfs or other celestial bodies. This makes the method of extra-dimensional PBH search based on possible dense celestial body absorption much more effective and realistic in the region of 6D Planck masses up to 103 TeV.

УДК 530.145

В. В. КУДРЯШОВ, А. В. БАРАН

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА ДЛЯ ЭЛЕКТРОНА В КРУГОВОМ КВАНТОВОМ КОЛЬЦЕ С УЧЕТОМ СПИН-ОРБИТАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 07.10.2011)

Исследование квантовых колец (наноклец) представляет большой интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения в связи с развитием нанотехнологий. Круговые квантовые кольца в полупроводниковых гетероструктурах могут быть эффективно описаны как двумерные системы с удерживающим потенциалом $V_c(\rho)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. В [1, 2] предложена простая, но достаточно адекватная модель, в которой квантовому кольцу соответствует аксиально-симметричная прямоугольная потенциальная яма

$$V_c(\rho) = \begin{cases} V, & 0 < \rho < \rho_i, \\ 0, & \rho_i < \rho < \rho_o, \\ V, & \rho_o < \rho < \infty \end{cases} \quad (1)$$

конечной глубины V , где ρ_i и ρ_o – внутренний и внешний радиусы кольца. Заметим, что удерживающий потенциал конечной глубины использовался и при описании квантовых точек [3, 4] с учетом спин-орбитального взаимодействия.

При описании состояний электронов в гетероструктурах необходимо учитывать спин-орбитальное взаимодействие, которое состоит из взаимодействия Рашбы [5, 6]

$$V_R = \alpha(\sigma_x p_y - \sigma_y p_x) / \hbar \quad (2)$$

и взаимодействия Дрессельхауса [7]

$$V_D = \beta(\sigma_x p_x - \sigma_y p_y) / \hbar, \quad (3)$$

где σ_x и σ_y – стандартные матрицы Паули. Интенсивности этих взаимодействий зависят от используемых материалов, а вклад каждого из них может быть измерен с применением различных экспериментальных методов [8].

В общем случае полное спин-орбитальное взаимодействие имеет вид $V_R + V_D$ при $\beta \neq \alpha$. Однако значительное внимание уделяется и тому частному случаю [9, 10], когда спин-орбитальные взаимодействия Рашбы и Дрессельхауса имеют равную интенсивность $\beta = \pm\alpha$, что может быть экспериментально достигнуто благодаря тому, что интенсивностью и знаком взаимодействия Рашбы можно управлять внешним электрическим полем. В настоящей работе для этого специального случая получены точные волновые функции, а также зависимость уровней энергии от интенсивности спин-орбитального взаимодействия, относительной ширины кольца и глубины потенциальной ямы.

Уравнение Шрёдингера, описывающее электрон в двумерном квантовом кольце, перпендикулярном оси z , имеет вид

$$\left(\frac{p_x^2 + p_y^2}{2\mu} + V_c(\rho) \pm \alpha(\sigma_x \mp \sigma_y)(p_x \pm p_y) / \hbar \right) \psi(x, y) = E \psi(x, y), \quad (4)$$

где μ – эффективная масса электрона, верхние знаки соответствуют $\beta = +\alpha$, а нижние – $\beta = -\alpha$.

Легко убедиться в том, что при $\beta = \pm\alpha$ интегралами движения наряду с $(\sigma_x \mp \sigma_y)$ являются операторы

$$L^{\pm} = L_z + \alpha\mu(x \mp y)(\sigma_x \mp \sigma_y) / \hbar. \quad (5)$$

Будем искать такие решения уравнения (4), которые являются собственными функциями операторов $(\sigma_x \mp \sigma_y)$ и L^{\pm} . Уравнение Шрёдингера допускает разделение переменных с помощью подстановки

$$\Psi_{\pm}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm e^{-i\pi/4} \end{pmatrix} e^{\mp i\sqrt{2}\alpha\mu(x+y)/\hbar^2} e^{im\varphi} u(\rho), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6)$$

при $\beta = +\alpha$ и

$$\Psi_{\pm}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm e^{i\pi/4} \end{pmatrix} e^{\pm i\sqrt{2}\alpha\mu(x-y)/\hbar^2} e^{im\varphi} u(\rho), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7)$$

при $\beta = -\alpha$. Здесь использованы полярные координаты ρ, φ ($x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$).

Перейдя к безразмерным величинам

$$r = \frac{\rho}{\rho_o}, \quad e = \frac{2\mu\rho_o^2}{\hbar^2} E, \quad v = \frac{2\mu\rho_o^2}{\hbar^2} V, \quad a = \frac{2\mu\rho_o}{\hbar^2} \alpha, \quad (8)$$

запишем радиальное уравнение

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left(e - v_c(r) + a^2 \right) u - \frac{m^2}{r^2} u = 0, \quad (9)$$

где

$$v_c(r) = \begin{cases} v, & 0 < r < r_i, \\ 0, & r_i < r < 1, \\ v, & 1 < r < \infty. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь введено обозначение $r_i = \rho_i / \rho_o$ для относительной ширины кольца. Подчеркнем, что каждый энергетический уровень является двукратно вырожденным.

Уравнение (9) является уравнением Бесселя. Будем искать радиальную волновую функцию $u(r)$, регулярную в начале координат $r = 0$ и убывающую на бесконечности $r \rightarrow \infty$.

Рассмотрим три области $0 < r < r_i$ (область 1), $r_i < r < 1$ (область 2) и $1 < r < \infty$ (область 3) раздельно.

В области 1, учитывая свойства модифицированных функций Бесселя первого рода [11], выбираем частное решение радиального уравнения (9) в виде

$$u_1(r) = c_1 I_m(k_o r), \quad (11)$$

где

$$k_o = \sqrt{v - e - a^2}. \quad (12)$$

Это решение имеет правильное поведение около начала координат.

В области 3 подходящее частное решение радиального уравнения выражается через модифицированные функции Бесселя второго рода [11]:

$$u_3(r) = c_3 K_m(k_o r). \quad (13)$$

Данная функция стремится к нулю на бесконечности.

В области 2 нет ограничений на выбор частных решений и искомые функции определяются следующим образом:

$$u_2(r) = c_{21} J_m(k_i r) + c_{22} Y_m(k_i r) \quad (14)$$

через функции Бесселя первого и второго рода [11]. Здесь введено обозначение

$$k_i = \sqrt{e + a^2}. \quad (15)$$

Условие непрерывности

$$u_1(r_i) = u_2(r_i), \quad u_1'(r_i) = u_2'(r_i), \quad u_2(1) = u_3(1), \quad u_2'(1) = u_3'(1), \quad (16)$$

для радиальной волновой функции и ее первой производной в граничных точках $r = r_i$ и $r = 1$ приводит к системе алгебраических уравнений

$$M_4(m, e, v, r_i, a) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_{21} \\ c_{22} \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (17)$$

для четырех коэффициентов c_1, c_{21}, c_{22} и c_3 , где $M_4(m, e, v, r_i, a) - 4 \times 4$ -матрица вида

$$M_4 = \begin{pmatrix} I_m(k_o r_i) & -J_m(k_i r_i) & -Y_m(k_i r_i) & 0 \\ k_o I_{m+1}(k_o r_i) & k_i J_{m+1}(k_i r_i) & k_i Y_{m+1}(k_i r_i) & 0 \\ 0 & J_m(k_i) & Y_m(k_i) & -K_m(k_o) \\ 0 & -k_i J_{m+1}(k_i) & -k_i Y_{m+1}(k_i) & k_o K_{m+1}(k_o) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Следовательно, точное уравнение для определения энергии $e(m, v, r_i, a)$ имеет вид

$$\det M_4(m, e, v, r_i, a) = 0. \quad (19)$$

Из выражений (12) и (15), видно, что зависимость e от a является тривиальной: $e(m, v, r_i, a) = e_0(m, v, r_i) - a^2$, где $e_0(m, v, r_i) = e(m, v, r_i, 0)$. Разумеется, уравнение (19) не может быть решено аналитически, но легко решается численно.

Для того чтобы построить радиальную волновую функцию полностью, найдем значения искомых коэффициентов

$$\begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ c_3 \end{pmatrix} = -c_1 M_3^{-1}(m, e, v, r_i, a) \begin{pmatrix} k_o I_{m+1}(k_o r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где

$$M_3 = \begin{pmatrix} k_i J_{m+1}(k_i r_i) & k_i Y_{m+1}(k_i r_i) & 0 \\ J_m(k_i) & Y_m(k_i) & -K_m(k_o) \\ -k_i J_{m+1}(k_i) & -k_i Y_{m+1}(k_i) & k_o K_{m+1}(k_o) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Значение коэффициента c_1 определим из условия нормировки

$$\int_0^{\infty} u^2(r) r dr = 1. \quad (22)$$

Теперь представим результаты численного решения уравнения (19). Полагая $\rho_o = 30$ нм и $\mu = 0,067m_e$ (m_e – масса электрона), получаем следующие соответствия: $a = 1 \rightarrow \alpha = 18,9579$ мэВ·нм, $e = 1 \rightarrow E = 0,631933$ мэВ между безразмерными и размерными величинами. Так, например, при выбранных параметрах безразмерной величине $v = 400$ соответствует глубина потенциальной ямы $V = 252,772$ мэВ, близкая к значению 257 мэВ в работе [2].

Таблицы 1–3 демонстрируют зависимость уровней энергии e_0 от относительной ширины кольца r_i , значения квантового числа углового момента m и глубины потенциальной ямы v . В таблицах приведены только первые шесть значащих цифр для каждого значения энергии, хотя, разумеется, они могут быть представлены с любой заданной точностью.

Таблица 1. Уровни энергии e_0 при $\nu = 100$

m	r_i	e		
0	0,1	6,44373	29,3430	67,204
0	0,5	19,2307	71,6109	
0	0,9	80,7533		
1	0,1	12,1534	40,4349	82,7073
1	0,5	21,2235	74,2974	
1	0,9	82,0011		
2	0,1	21,6651	57,2693	
2	0,5	27,0296	81,3150	
2	0,9	85,5640		

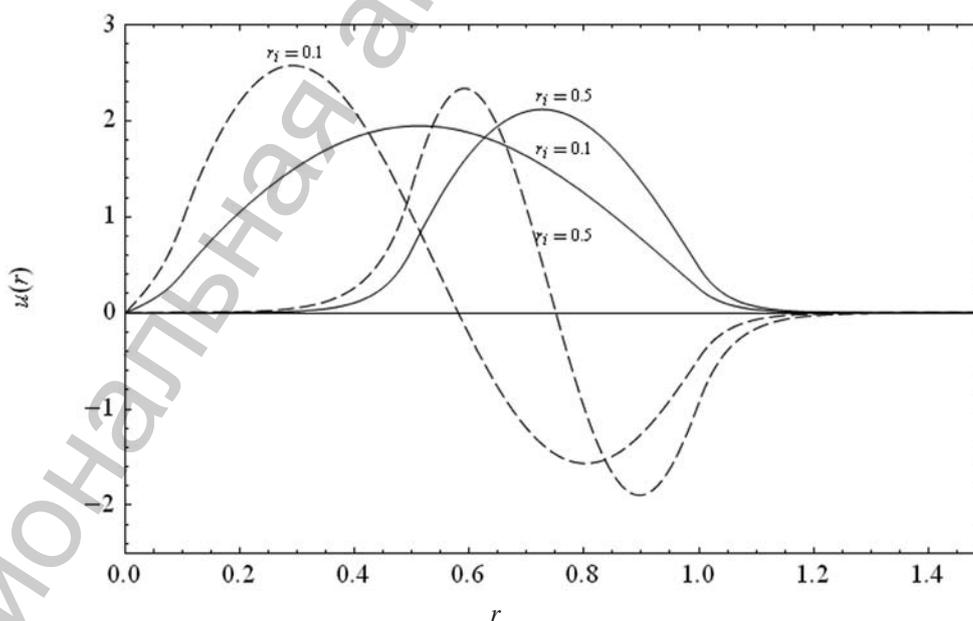
Таблица 2. Уровни энергии e_0 при $\nu = 400$

m	r_i	e					
0	0,1	8,40562	36,9454	85,0236	151,822	235,986	334,551
0	0,5	26,8322	107,288	235,075	384,438		
0	0,9	218,218					
1	0,1	13,5274	45,7776	96,8514	166,519	253,899	355,996
1	0,5	28,7345	109,360	237,247	387,653		
1	0,9	219,339					
2	0,1	23,9099	64,1730	122,141	197,573	289,541	392,547
2	0,5	34,3903	115,577	243,741	394,771		
2	0,9	222,701					

Таблица 3. Уровни энергии e_0 при $\nu = 700$

m	r_i	e							
0	0,1	8,99511	39,2512	90,2916	161,661	252,768	362,667	489,615	629,427
0	0,5	29,2605	117,701	262,291	456,199	671,751			
0	0,9	296,625							
1	0,1	13,9367	47,3751	100,653	173,853	266,753	378,764	508,587	652,099
1	0,5	31,1499	119,735	264,374	458,342	674,608			
1	0,9	297,740							
2	0,1	24,4912	65,8332	125,629	204,061	301,176	416,680	549,380	692,161
2	0,5	36,7773	125,841	270,626	464,762	681,873			
2	0,9	301,084							

Из таблиц видно, что число допустимых связанных состояний увеличивается с ростом ν и уменьшается с ростом r_i .



Радиальные волновые функции

На рисунке приведены непрерывные нормированные радиальные волновые функции для $\nu = 400$, $a = 1$, $m = 1$ при $r_i = 0,1$ и $0,5$. Сплошные линии соответствуют первым уровням энергии, а штриховые – вторым уровням.

Таким образом, в рамках адекватной модели с удерживающим потенциалом конечной глубины получено точное квантовомеханическое описание состояний электронов в нанокольцах с учетом спин-орбитальных взаимодействий Рашбы и Дрессельхауса равных интенсивностей, что может представлять интерес для спинтроники в полупроводниковых гетероструктурах.

Литература

1. *Bandos T. V., Cantarero A., Garcia-Cristóbal A.* // Eur. Phys. J. B. 2006. Vol. 53. P. 99-108.
2. *Grochol M., Grosse F., Zimmermann R.* // Phys. Rev. B. 2006. Vol. 74. 115416.
3. *Kudryashov V. V.* // Foundations and Advances in Nonlinear Science. Proceedings of the 13th International Conference and School. Minsk, 2006. P. 125–130; Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2009. Vol. 12. P. 199–203; arXiv:0708.3904.
4. *Chaplik A. V., Magarill L. I.* // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 96. 126402.
5. *Пауба Э. И.* // ФТТ. 1960. Т. 2. С. 1224–1238.
6. *Bychkov Yu. A., Rashba E. I.* // J. Phys. C. 1984. Vol. 17. P. 6039–6046
7. *Dresselhaus G.* // Phys. Rev. 1955. Vol. 100. P. 580-586.
8. *Meier L. et al.* // Nature Physics. 2007. Vol. 3. P. 650-654.
9. *Schliemann J., Egues J. C., Loss D.* // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 90. 14680.
10. *Bernevig B. A., Orenstein J., Zhang S. C.* // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 97. 236601.
11. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М., 1979.

V. V. KUDRYASHOV, A. V. BARAN

EXACT SOLUTIONS OF THE SCHRÖDINGER EQUATION FOR AN ELECTRON IN THE CIRCULAR QUANTUM RING TAKING INTO ACCOUNT SPIN-ORBIT INTERACTIONS

Summary

The exact solutions of the Schrödinger equation are obtained for an electron in two-dimensional circular semiconductor quantum ring in the presence of the Rashba and Dresselhaus spin-orbit interactions of equal strength. Confinement is simulated by a realistic potential well of finite depth. The dependence of energy levels on the strength of spin-orbit interaction, the relative ring width, and the depth of a potential well is presented.

УДК 530.12

А. П. РЯБУШКО¹, И. Т. НЕМАНОВА¹, Т. А. ЖУР²

**ДВИЖЕНИЕ ПРОБНОГО ТЕЛА В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ,
 ПОРОЖДЕННОМ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДОЙ С ПРИТЯГИВАЮЩИМ ЦЕНТРОМ**

¹Белорусский национальный технический университет

²Белорусский государственный аграрный технический университет

(Поступила в редакцию 28.01.2011)

Введение. В работе [1] в постньютоновском приближении (ПНП) общей теории относительности (ОТО) найдена метрика риманова пространства-времени, порожденного материальным шаром радиусом R_0 с притягивающим центром (тело радиусом R_0 и массой M) в случае, когда плотность центрально-симметричного распределения материи в шаре $\rho(r)$ определяется трехзвенной полигональной моделью (см. (1) в [1]):

$$\rho(r) = \rho_n + (\rho_{n+1} - \rho_n) \frac{r - r_n}{r_{n+1} - r_n}, \quad (1)$$

где $n = 0, 1, 2, 3$; $r_0 = R_0$, $r_3 = R$, $r_4 = \infty$, $\rho_3 = 0$, $\rho_4 = 0$; r – расстояние до центра шара.

Известно [2–4], что движение пробного тела в гравитационном поле происходит по геодезической линии риманова пространства-времени, метрика которого $g_{\alpha\beta}$ является решением известных полевых уравнений Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\frac{8\pi\gamma}{c^4} T_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, \quad (2)$$

а уравнения геодезических линий имеют вид ($\nu = 0, 1, 2, 3$)

$$\frac{d^2 x^\nu}{ds^2} + \tilde{A}_{\alpha\beta}^\nu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0, \quad ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (3)$$

в которых x^ν – 4-координаты пробного тела, символы Кристоффеля $\tilde{A}_{\alpha\beta}^\nu$ выражаются через компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ по формулам:

$$\tilde{A}_{\alpha\beta}^\nu = \frac{1}{2} g^{\nu\delta} \left(\frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\delta} \right). \quad (4)$$

По повторяющимся индексам α, β, δ и другим индексам идет суммирование, $\delta = 0, 1, 2, 3$.

Согласно аппроксимационному методу Эйнштейна–Инфельда [5–7] $g_{\alpha\beta}$ имеют (без учета излучения электромагнитных и гравитационных волн) следующие для нашего случая разложения в ряды по малому параметру $\lambda = c^{-1}$ (c – скорость света в вакууме):

$$g_{00} = 1 + \lambda^2 h_{00} + \lambda^4 h_{00} + \dots; \quad g_{0i} \equiv 0; \quad g_{ij} = -\delta_{ij} + \lambda^2 h_{ij} + \dots, \quad (5)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера; $i, j = 1, 2, 3$.

Вводя известным образом плотность (1) в тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ (см. [8]), получаем конкретные уравнения Эйнштейна (2), которые решаем в соответствующих приближениях по λ

и находим метрику $g_{\alpha\beta}$ в ПНП ОТО h_{200} , h_{400} , h_{2ij} в каждой из четырех областей I–IV, что и составило предмет исследований в предыдущей работе авторов (см. формулы (4) – (8) и (15) – (18) в [1]).

1. Уравнения движения. Нами все подготовлено в [1] для получения уравнений движения пробных тел (уравнений геодезических). Прежде всего, пользуясь разложением метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ согласно (5), разлагаем в ряды символы Кристоффеля (4). Тогда уравнения геодезических линий (3) также можно разложить в ряды. Для $\nu = i$ получаем после несложных, но достаточно утомительных вычислений следующие уравнения движения пробного тела в ПНП ОТО:

$$\frac{d^2 \tilde{x}^i}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{h}_{200}}{\partial \tilde{x}^i} = f^i, \quad (6)$$

где

$$f^i = \frac{1}{c^2} \left(2 \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^s}{dt} \frac{\partial h_{200}}{\partial x^s} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{400}}{\partial x^i} - \frac{1}{2} h_{200} \frac{\partial h_{200}}{\partial x^i} - \frac{1}{2} \frac{dx^s}{dt} \frac{dx^s}{dt} \frac{\partial h_{200}}{\partial x^i} \right) \quad (7)$$

и t – время по часам далекого неподвижного наблюдателя, f^i – релятивистская добавка к ньютоновскому ускорению $d^2 x^i / dt^2$, тильда «~» над x^i означает координаты пробного тела в ПНП ОТО. Если в (6) f^i заменить нулем, то получим ньютоновские уравнения движения и значок «~» следует убрать. В (7) x^i являются ньютоновскими координатами пробного тела.

Уравнение (3) для $\nu = 0$ не выписываем, так как оно является следствием трех уравнений при $\nu = i$, т. е. в ПНП ОТО является следствием уравнений (6). Можно показать, что уравнение (3) при $\nu = 0$ дает закон сохранения энергии пробного тела единичной массы, который мы и получим ниже с помощью комбинации уравнений (6).

2. Ньютоновские уравнения движения и законы сохранения. В уравнениях (6) f^i заменяем нулем, устраняем значок «~» и вместо h_{200} последовательно подставляем h_{200}^I , h_{200}^{II} , h_{200}^{III} , h_{200}^{IV} , взятые из работы [1], формулы (4) – (7) соответственно. В итоге получаем ньютоновские уравнения движения в каждой из четырех областей:

$$\text{I. } \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{\gamma M}{r^3} x^i + \frac{1}{3} \pi \gamma \left[4\rho_0 - 3(\rho_0 - \rho_1) \frac{r}{r_1} \right] x^i = 0, \quad R_0 \leq r \leq r_1; \quad (8)$$

$$\text{II. } \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{\gamma M}{r^3} x^i + \frac{1}{3} \pi \gamma \left[\left(\rho_0 - \rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{r_2 - r_1} r_1 \right) \frac{r_1^3}{r^3} + \frac{\rho_2 - \rho_1}{r_2 - r_1} (3r - 4r_1) + 4\rho_1 \right] x^i = 0, \quad r_1 \leq r \leq r_2; \quad (9)$$

$$\text{III. } \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{\gamma M}{r^3} x^i + \frac{1}{3} \pi \gamma \left\{ (\rho_0 - \rho_1) \frac{r_1^3}{r^3} + \frac{4R - 3r}{R - r_2} \rho_2 + \frac{1}{r^3} \left[4r_2^3 \rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{r_2 - r_1} (3r_2^4 - 4r_1 r_2^3 + r_1^4) + \frac{3r_2 - 4R}{R - r_2} r_2^3 \rho_2 \right] \right\} x^i = 0, \quad r_2 \leq r \leq R; \quad (10)$$

$$\text{IV. } \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{\gamma(M + m_p)}{r^3} x^i = 0, \quad m_p = \frac{1}{3} \pi \left[(\rho_0 - \rho_1) r_1^3 + 4r_2^3 \rho_1 + (3r_2^4 - 4r_1 r_2^3 + r_1^4) \frac{\rho_2 - \rho_1}{r_2 - r_1} + (R^4 - 4R r_2^3 + 3r_2^4) \frac{\rho_2}{R - r_2} \right], \quad R \leq r < +\infty, \quad (11)$$

где m_p является массой всей содержащейся в шаре материи без массы центра M . На границах областей, когда $r = r_1$, $r = r_2$, $r = R$, уравнения движения (8) и (9), (9) и (10), (10) и (11) совпадают. Это является следствием того, что на границах областей метрика риманова пространства-времени гладко «сшита» и поэтому гравитационное поле, скорость и ускорение пробного тела меняется непрерывно при переходе из области в область.

Так как распределение материи имеет центральную симметрию, то и гравитационное поле обладает той же симметрией и движение пробных тел происходит в плоскости, за которую без ограничения общности можно принять координатную плоскость $x^1 O x^2$, т. е. $x^3 \equiv 0$. Тогда в уравнениях движения (6) и релятивистской добавке (7) при $i = 3$ получаем нулевые тождества.

При учете сказанного с помощью (6) конструируем ньютоновский удельный (на единицу массы) орбитальный момент импульса L пробного тела:

$$x^1 \frac{d^2 x^2}{dt^2} - x^2 \frac{d^2 x^1}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(x^1 \frac{dx^2}{dt} - x^2 \frac{dx^1}{dt} \right) = 0,$$

т. е. момент импульса

$$L \equiv x^1 \frac{dx^2}{dt} - x^2 \frac{dx^1}{dt} = \text{const}. \quad (12)$$

Уравнение (12) еще носит название «интеграл площадей».

Следующая комбинация (получаемая с помощью ньютоновских уравнений (6) при $f^i = 0$)

$$\frac{dx^1}{dt} \frac{d^2 x^1}{dt^2} + \frac{dx^2}{dt} \frac{d^2 x^2}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^2 \right] = -\frac{1}{2} \frac{dh_{00}}{dt}$$

приводит к удельному интегралу энергии H :

$$H \equiv \frac{1}{2} (v^2 + h_{00}) = \text{const}, \quad (13)$$

где $v^2 = (dx^1/dt)^2 + (dx^2/dt)^2$ – квадрат поступательной скорости тела.

Если в плоскости $x^1 O x^2$ ввести полярную систему координат по формулам $x^1 = r \cos \varphi$, $x^2 = r \sin \varphi$, то интеграл площадей L (12) и интеграл энергии H (13) запишутся в виде:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = L = \text{const}, \quad \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + h_{00} \right] = H = \text{const}. \quad (14)$$

С помощью первых интегралов (14) в следующей работе авторов будут получены в каждой из областей I–IV дифференциальные уравнения орбиты пробного тела, которые там же будут проинтегрированы с указанием на возникающие ньютоновские эффекты из-за учета гравитационного поля среды.

3. Уравнения движения и законы сохранения в ПНП ОТО. Уравнения движения пробного тела в ПНП ОТО (6), (7) можем считать нам известными во всех областях I–IV, так как нам известны в этих областях выражения для h_{00} и h_{0i} (см. в работе [1] формулы (4) – (7) и (15) – (18)). Подставив эти выражения в (6), (7), получим уравнения движения очень громоздкими и трудно обозримыми. Поэтому мы их выписывать не будем, а ограничимся выводом только двух интегралов движения (площадей и энергии), которых нам будет вполне достаточно для получения релятивистского уравнения орбиты и предсказания релятивистских эффектов в каждой области I–IV.

Релятивистский удельный орбитальный момент импульса \tilde{L} определяем по формуле, аналогичной формуле (12):

$$\tilde{L} \equiv \tilde{x}^1 \frac{d\tilde{x}^2}{dt} - \tilde{x}^2 \frac{d\tilde{x}^1}{dt}. \quad (15)$$

Умножая (6) при $i = 1$ на \tilde{x}^2 , при $i = 2$ на \tilde{x}^1 и вычитая из второго полученного выражения первое, приходим к равенству:

$$\tilde{x}^1 \frac{d^2 \tilde{x}^2}{dt^2} - \tilde{x}^2 \frac{d^2 \tilde{x}^1}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\tilde{x}^1 \frac{d\tilde{x}^2}{dt} - \tilde{x}^2 \frac{d\tilde{x}^1}{dt} \right) = \tilde{x}^1 f^2 - \tilde{x}^2 f^1 = x^1 f^2 - x^2 f^1, \quad (16)$$

так как члены с $\partial \tilde{h}_{200} / \partial \tilde{x}^1$ и $\partial \tilde{h}_{200} / \partial \tilde{x}^2$, пропорциональные \tilde{x}^1 и \tilde{x}^2 соответственно, при указанной комбинации (15) уничтожаются, а справа \tilde{x}^1, \tilde{x}^2 можно заменить на x^1, x^2 ($f^1, f^2 \sim c^{-2}$). Второй, третий и четвертый члены в выражении (7) для f^i также пропорциональны x^i и поэтому справа в (16) они уничтожаются. В итоге (16) приобретает вид (если учесть еще и (12)):

$$\frac{d\tilde{L}}{dt} = \frac{2L}{c^2} \frac{dx^s}{dt} \frac{\partial h_{200}}{\partial x^s} = \frac{2L}{c^2} \frac{dh_{200}}{dt}.$$

Так как согласно (12) $L = \text{const}$, то

$$\tilde{L} = \frac{2}{c^2} L h_{200} + \text{const}. \quad (17)$$

Релятивистский аналог интеграла энергии получим следующим образом. Умножаем (6) при $i = 1$ на $d\tilde{x}^1/dt$, при $i = 2$ – на $d\tilde{x}^2/dt$ и полученные выражения складываем. Тогда находим:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}^1}{dt} \frac{d^2 \tilde{x}^1}{dt^2} + \frac{d\tilde{x}^2}{dt} \frac{d^2 \tilde{x}^2}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{h}_{200}}{\partial \tilde{x}^s} \frac{d\tilde{x}^s}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{d\tilde{x}^1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\tilde{x}^2}{dt} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{d\tilde{h}_{200}}{dt} = f^1 \frac{dx^1}{dt} + f^2 \frac{dx^2}{dt}, \\ \left(\frac{d\tilde{x}^1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\tilde{x}^2}{dt} \right)^2 + \tilde{h}_{200} &= 2 \int \left(f^1 \frac{dx^1}{dt} + f^2 \frac{dx^2}{dt} \right) dt + \text{const}. \end{aligned} \quad (18)$$

Стоящие f^1 и f^2 под знаком интеграла в (18) заменяем их выражениями из (7), а появившееся v^2 заменяем согласно (13) на $2H - \frac{h_{200}}{2}$. Тогда (18) можно записать, проведя необходимые преобразования, в виде:

$$\tilde{v}^2 + \tilde{h}_{200} = \frac{2}{c^2} \left(3H h_{200} - \frac{h_{200}^2}{2} - \frac{1}{4} h_{200} \right) + \text{const}, \quad (19)$$

где $\tilde{v}^2 = (d\tilde{x}^1/dt)^2 + (d\tilde{x}^2/dt)^2$ – квадрат релятивистской поступательной скорости пробного тела на орбите.

Первые интегралы (17) и (19) дают возможность проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (6), что и составит предмет исследования следующей работы авторов.

Литература

1. Рябушко А. П., Неманова И. Т., Жур Т. А. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 1. С. 96–100.
2. Einstein A., Grommer J. // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-math. Kl. 1927. P. 2–13. (Перевод: А. Эйнштейн. Собр. научн. тр. Т. 2. М., 1966. С. 198–210).
3. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М., 1961. § 63.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1988. § 47, 54.
5. Einstein A., Infeld L. // Canad. Journ. Math. 1949. Vol. 1. P. 209–241.
6. Infeld L., Plebański J. Motion and Relativity. Warszawa, 1960.
7. Рябушко А. П. Движение тел в общей теории относительности. Минск, 1979.
8. Рябушко А. П., Неманова И. Т., Жур Т. А. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2005. № 4. С. 77–85.

A. P. RYABUSHKO, I. T. NEMANOVA, T. A. ZHUR

MOTION OF A TEST BODY IN THE RIEMANN SPACE-TIME GENERATED BY A NONUNIFORM MEDIUM WITH THE ATTRACTION CENTER

Summary

In the post-Newtonian approximation of the general relativity theory, the first integrals of differential equations of the geodesic lines of the Riemann space-time are derived.

УДК 534.535

А. Е. АНИСИМОВА¹, Г. В. КУЛАК¹, П. И. РОПОТ²

**ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ ПРИ БРЭГГОВСКОЙ ДИФРАКЦИИ
 НА ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННОЙ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ ВОЛНЕ**

¹Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина

²Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 19.08.2011)

Введение. В работах [1, 2] экспериментально и теоретически исследованы эффекты углового расщепления брэгговского дифракционного порядка, возникающие при акустооптическом (АО) преобразовании светового пучка на частотно-модулированной ультразвуковой волне, однако достаточно полного теоретического объяснения эффекта с учетом ограниченного профиля падающего светового пучка не дано. Дифракция света на акустических цугах исследована в [3] для целей оптимизации работы коллинеарных акустооптических фильтров, цифровых процессоров, АО развертывающих устройств. В [4] получена динамическая оптическая передаточная функция акустооптического модулятора с затухающей звуковой волной. Получено решение динамической акустооптической задачи для произвольной пространственно-временной структуры звукового сигнала в виде степенных рядов. Двумерная теория брэгговской дифракции световых пучков на затухающих акустических волнах рассмотрена в работе [5]. Исследовано преобразование поляризационных и амплитудных распределений по апертуре ограниченных световых пучков в гиротропных кубических кристаллах с использованием двумерной теории связанных волн [6].

В настоящей работе с использованием двумерной теории связанных волн рассмотрена анизотропная АО дифракция ограниченных световых пучков, распространяющихся вблизи оптической оси гиротропного кристалла, на частотно-модулированной ультразвуковой (УЗ) волне. Предложено теоретическое обоснование особенностей пространственно-углового преобразования ограниченных световых пучков на частотно-модулированных акустических сигналах.

Теоретические результаты и обсуждение. Предположим, что область, занятая ультразвуком, находится между плоскостями $z = 0$ и $z = l$. Световой пучок с некоторым распределением амплитуды распространяется в плоскости XZ под углом φ_1 к фронту УЗ волны и дифрагирует под углом φ_2 . Геометрия АО взаимодействия представлена на рис. 1.

Квазиплоская частотно-модулированная УЗ волна имеет вектор смещения вида [1, 2]:

$$U = U_0 \exp[i(Kx - \Omega(t))t], \tag{1}$$

где $\Omega(t) = \Omega_0 + \Delta\Omega_m \sin(\Omega_m t)$ – угловая частота в момент времени t ($\Omega_0 = 2\pi f_0$ – центральная частота УЗ источника, $\Delta\Omega_m$ – максимальное отклонение от центральной частоты, Ω_m – угловая частота модулирующего сигнала), U_0 – амплитуда УЗ волны; $K = \Omega_0 / v$, v – фазовая скорость УЗ волны. УЗ волна создает периодическое в пространстве и времени изменение тензора диэлектрической

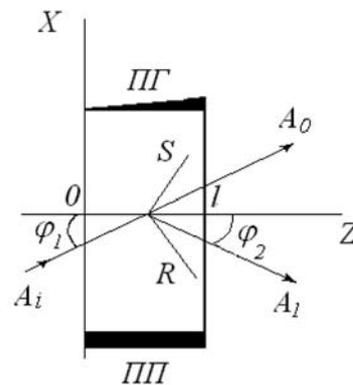


Рис. 1. Геометрия анизотропной акустооптической дифракции ограниченных световых пучков (ПП – пьезопреобразователь, ПП – поглотитель)

проницаемости $\Delta\varepsilon_{ij}$, связанное с тензором упругих деформаций $U_{ik} = (\nabla_k U_i + \nabla_i U_k) / 2$ и тензором фотоупругих постоянных p_{ijkl} .

Из уравнений Максвелла и материальных уравнений следует волновое уравнение для напряженности светового поля в области, занятой ультразвуком [5]. Решение волнового уравнения ищем в виде суммы двух связанных волн с медленно изменяющимися амплитудами:

$$E = e_{\tau 0} A_0(x, z, t) e^{i[k_0 r - \omega t]} + e_{\tau 1} A_1(x, z, t) e^{i[k_1 r - \omega_1 t]}, \quad (2)$$

где $e_{\tau 0,1}$ – единичные векторы эллиптической поляризации дифрагированных волн; $\Omega_1 = \omega \pm \Omega$, где ω – частота световой волны; $k_{0x} = \frac{\omega}{c} n_0 \sin \varphi_1$, $k_{0z} = \frac{\omega}{c} n_0 \cos \varphi_1$, $k_{1x} = [(\omega \pm \Omega) / c] n_1 \sin \varphi_2$, $k_{1z} = [(\omega \pm \Omega) / c] n_1 \cos \varphi_2$ – волновые векторы падающей и дифрагированной волны; c – скорость света в вакууме; $n_0 = \sqrt{\varepsilon_{ij} \tilde{k}_0 \tilde{k}_0}$, $n_1 = \sqrt{\varepsilon_{ij} \tilde{k}_1 \tilde{k}_1}$, где \tilde{k}_0 (\tilde{k}_1) – единичные векторы в направлении распространения дифрагированной волны нулевого (первого) порядка. Подставив выражение (2) в волновое уравнение для напряженности светового поля E , получим систему уравнений связанных волн:

$$\frac{\partial A_0}{\partial s} + \frac{1}{v_0} \frac{\partial A_0}{\partial t} + i\gamma_0 A_1 = 0, \quad \frac{\partial A_1}{\partial r} + \frac{1}{v_1} \frac{\partial A_1}{\partial t} + i\gamma_1 A_0 = 0, \quad (3)$$

где коэффициенты связи мод выражаются через свертки тензора диэлектрической проницаемости $\Delta\varepsilon_{ij}$ с векторами поляризации $\gamma_{0,1} = k(e_{\tau 0,1} \Delta \hat{\varepsilon} e_{\tau 1,0}) / 4\sqrt{n_0 n_e \cos(\alpha - \varphi_1) \cos(\alpha + \varphi_2)}$, причем $k = 2\pi / \lambda_0$ (λ_0 – длина световой волны в вакууме); $s = z \sin \varphi_2 - x \cos \varphi_2$, $r = z \sin \varphi_1 + x \cos \varphi_1$; $v_{0,1} = c / n_{0,1}$ – групповые скорости дифрагированных световых волн; $i = \sqrt{-1}$; n_0 (n_e) – обыкновенный (необыкновенный) показатели преломления кристалла. При таком подходе из-за малой длины АО взаимодействия не учитывается изменение фазового волнового фронта светового пучка.

Предполагается, что падающий световой пучок имеет гауссово амплитудное распределение: $A(r) = A_{in} \exp[-(r^2 / 2w^2)]$, где A_{in} – амплитуда падающей световой волны, w – радиус поперечного сечения светового пучка.

Для не слишком высоких частот ультразвука применимо квазистатическое приближение и тогда временными производными в системе уравнений (3) можно пренебречь [7]. Если искать решение системы уравнений (3) методом Римана [5, 6, 8] с использованием граничных условий: $A_0(z=0) = A$, $A_1(z=0) = 0$, то общее решение для дифрагированных волн нулевого $A_0(r, t)$ и первого $A_1(s, t)$ порядка можно представить в виде:

$$A_0(r, t) = A(r) - 0,5v(t) \int_{-1}^{+1} A[r - l(1 - \xi) \sin \varphi_1] \frac{J_1[v(t)\sqrt{1 - \xi^2}]}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi, \quad (4)$$

$$A_1(s, t) = i0,5v(t) \int_{-1}^{+1} A[l(1 - \xi) \sin \varphi_2 - s] J_0[v(t)\sqrt{1 - \xi^2}] d\xi, \quad (5)$$

где $v(t) = [1 + \Delta\Omega_n \sin(\Omega_m t)] v_0$, причем v_0 – коэффициент АО модуляции на монохроматической УЗ волне частотой Ω_0 ($\Delta\Omega_m = 0$). Следует учитывать, что $K_m = \Omega_m / v$, $\Delta K_m = \Delta\Omega_m / v$; $\Delta\Omega_n = \Delta\Omega_m / \Omega_0$ – нормированная частота девиации частоты для частотно-модулированного сигнала по отношению к среднему значению Ω_0 .

Величина v_0 определяется сверткой тензора приращений диэлектрической проницаемости $\Delta\varepsilon_{ij}$ с единичными векторами эллиптической поляризации $e_{\tau 0,1} = (e_{p,2} + i\tau_{o,e} e_{2,p}) / \sqrt{1 + \tau_{o,e}^2}$ (e_p – единичный вектор, перпендикулярный направлению распространения дифрагированной волны и лежащий в плоскости дифракции; e_2 – единичный вектор, перпендикулярный плоскости дифракции; $\tau_{o,e}$ – эллиптичности дифрагированных волн), то есть $v_0 \sim (e_{\tau 0}^* \Delta \hat{\varepsilon} e_{\tau 1})$ (знак «*» означает комплексное сопряжение).

Расчеты проводились для анизотропной АО дифракции световых волн, распространяющихся вблизи оптической оси кристалла парателлурита (TeO_2), обладающего гиротропией, на медленной

сдвиговой УЗ волне, распространяющейся вдоль оси [110] и поляризованной вдоль оси $[\bar{1}10]$. Расчет тензора возмущений диэлектрической проницаемости $\hat{\Delta}\epsilon$ проводится с помощью матрицы преобразования C , которая описывает поворот кристаллографической оси $X_1X_2X_3$ на угол 45° вокруг оси X_3 , а затем поворот полученной системы координат X',Y',Z' вокруг оси Y' на угол α таким образом, что ось X' совпадает с волновым вектором K УЗ волны [5]. В результате выполнения свертки тензора $\hat{\Delta}\epsilon$ с вектором поляризации получаем коэффициент АО модуляции световой волны

$$v_o = \Delta \{ [\tau_o \tau_e \cos(\alpha - \varphi_2) - \cos(\alpha - \varphi_1)] \Delta_1 + [\sin(\alpha + \varphi_1) - \tau_o \tau_e \sin(\alpha - \varphi_2)] \Delta_2 \}, \quad (6)$$

где

$$\tau_{oe} = \left[(1 + \tau_o^2)(1 + \tau_e^2) \right]^{1/2},$$

$$\Delta_1 = [n_e^4(p_{11} - p_{12}) + n_o^2 n_e^2 p_{44} \sin(2\alpha) / 8] / \tau_{oe}, \quad \Delta_2 = [n_e^4 \sin(2\alpha)(p_{12} - p_{11}) + n_o^2 n_e^2 p_{44} / 2] / \tau_{oe},$$

$$\Delta = \pi U_{12} / \{ 2\lambda_0 [n_o n_e \cos(\alpha - \varphi_1) \cos(\alpha + \varphi_2)]^{1/2} \},$$

причем $U_{12} = [2I_a / \rho v^3]^{1/2}$ (I_a – интенсивность УЗ волны, v – фазовая скорость УЗ волны, ρ – плотность кристалла; p_{11}, p_{12}, p_{44} – фотоупругие постоянные).

При расчете пространственной структуры брэгговского максимума следует положить: $\Omega_m t = K_m v t = K_m x$, где $x = l \operatorname{tg} \varphi_2 - s / \cos \varphi_2$. Такое пространственно-временное преобразование ($x = vt$) означает, что дифрагированное световое поле рассматривается в системе координат, движущейся со звуковой скоростью v . Пространственный период модулирующей функции в таком случае $T = 2\pi / K_m$ [1]; пространственная структура дифрагированного поля, наблюдавшаяся экспериментально, определяется соотношением пространственного периода модулирующей функции T и радиусом (диаметром) светового пучка w .

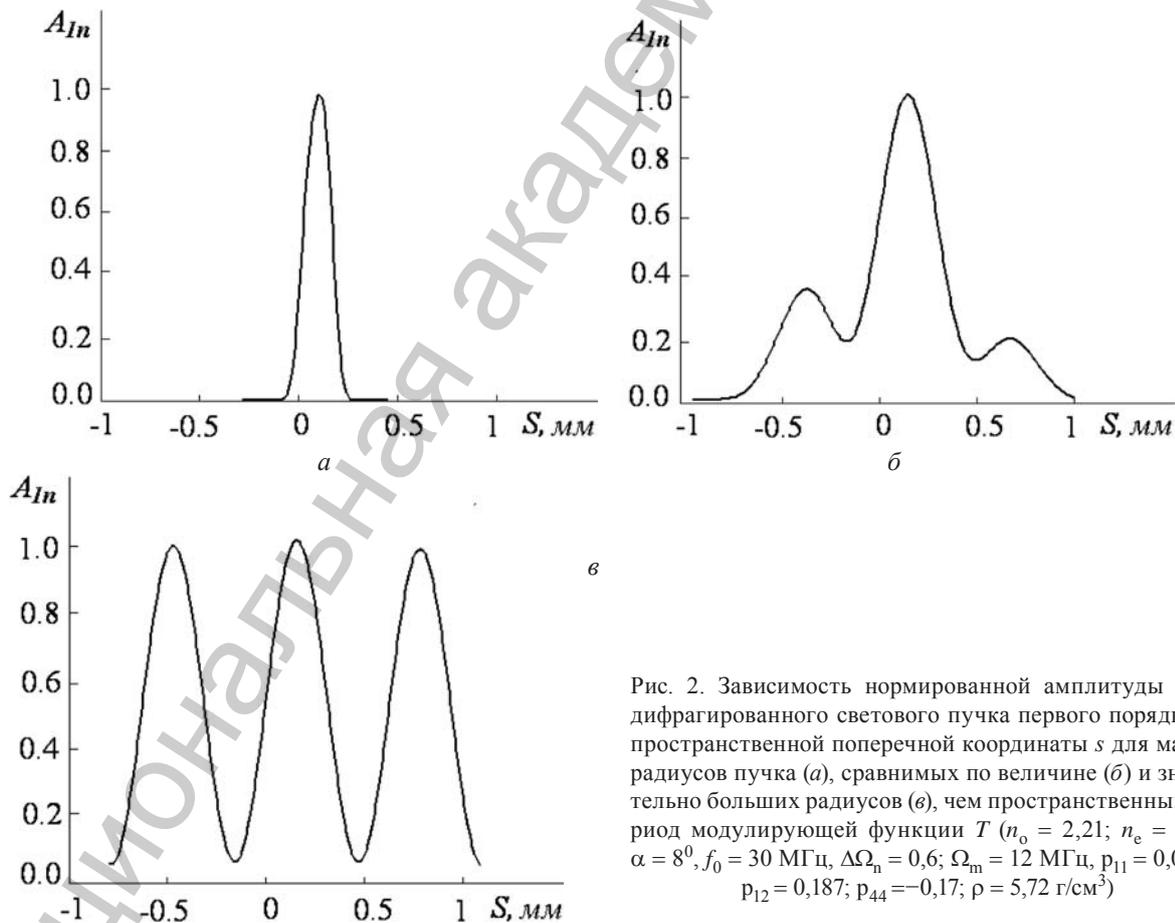


Рис. 2. Зависимость нормированной амплитуды (A_{1n}) дифрагированного светового пучка первого порядка от пространственной поперечной координаты s для малых радиусов пучка (а), сравнимых по величине (б) и значительно больших радиусов (в), чем пространственный период модулирующей функции T ($n_o = 2,21$; $n_e = 2,35$; $\alpha = 8^\circ$, $f_0 = 30$ МГц, $\Delta\Omega_n = 0,6$; $\Omega_m = 12$ МГц, $p_{11} = 0,0074$; $p_{12} = 0,187$; $p_{44} = -0,17$; $\rho = 5,72$ г/см³)

Численные расчеты проводились для АО дифракции гауссовых световых пучков с длиной волны $\lambda_0 = 1,06$ мкм, распространяющихся вблизи оптической оси кристалла TeO_2 , на медленной сдвиговой УЗ волне с интенсивностью $I_a \sim 1 \text{ Вт/см}^2$ и фазовой скоростью $v = 617$ м/с.

На рис. 2 представлена зависимость нормированной амплитуды дифрагированного светового пучка $A_{1n} = |A_1 / A_{1\text{max}}|$ от пространственной координаты s для малых радиусов светового пучка $w < T$ (а), близких по значению к периоду модулирующей функции T , т. е. $w \approx T$ (б), и больших радиусов $w > T$ (в). Из рисунка следует, что при малых диаметрах светового пучка пространственное распределение дифрагированного поля близко к гауссовому. При сравнимых значениях пространственного периода частотной модуляции T и радиуса светового пучка w структура светового пучка значительно трансформируется; при больших радиусах пучка имеет место сложное распределение светового поля в виде трехпиковой структуры (рассмотренный эффект наблюдался экспериментально в работе [1]). Очевидно, что аналогичные особенности АО дифракции должны наблюдаться для более сложных волновых пучков, например супергауссовых.

Заключение. Полученные результаты показывают, что использование сложных частотно-модулированных акустических сигналов при акустооптическом взаимодействии позволяет преобразовывать световые пучки с простым амплитудным распределением (гауссовым, супергауссовым) в световые пучки с многопиковой структурой брэгговского максимума. Такие особенности АО преобразований позволяют использовать их в системах термического нанесения изображений мощным лазерным излучением [1]. Следует отметить, что развитая теория дифракции может быть применена также для исследования АО дифракции на акустическом сигнале, образованном эквидистантным набором генерируемых акустических частот [2]. При этом, как следует из выражений (4), (5), число дифракционных максимумов может быть больше трех.

Литература

1. Антонов С. Н. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 4. С. 122–124.
2. Антонов С. Н., Резвов Ю. Г. // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 8. С. 93–100.
3. Балакиев В. Н., Упасен Ч. А. // Вестник МГУ. Сер. физ.-мат. наук. 1982. Т. 23. Вып. 5. С. 71–76.
4. Задорин А. С. // Опт. и спектр. 2000. Т. 88. Вып. 4. С. 686–692.
5. Белый В. Н., Войтенко И. Г., Кулак Г. В. // ЖПС. 1992. Т. 56. Вып. 5–6. С. 831–836.
6. Шарангович С. Н. // Автометрия. 1994. № 1. С. 31–39.
7. Балакиев В. Н., Парыгин В. Н., Чирков Л. Е. Физические основы акустооптики. М., 1985.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. Для научных работников и инженеров. М., 1984.

A. E. ANISIMOVA, G. V. KULAK, P. I. ROPOT

TRANSFORMATION OF LIGHT BEAMS UNDER BRAGG'S DIFFRACTION ON THE FREQUENCY-MODULATED ULTRASONIC WAVE

Summary

Specific features of Bragg's diffraction of the boundaries of light beams on the frequency-modulated acoustical signal are investigated. The expression for a space distributed amplitude of a diffracted beam is obtained in closed form. It is shown that the space distribution of the amplitude of a diffracted beam transforms when changing the relation of the incident light beam and the space modulation function transitioning to many-beam structures of Bragg's maxima.

УДК 621.382.2

Ф. П. КОРШУНОВ, И. Г. МАРЧЕНКО

ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ОБЛУЧЕНИЯ ПРИ ПОВЫШЕННЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ НА ДИФфуЗИОННЫЕ СТРУКТУРЫ С *p-n*-ПЕРЕХОДАМИ В КРЕМНИИ

Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению

(Поступила в редакцию 23.12.2011)

Проблема создания мощных и быстродействующих полупроводниковых приборов связана с достижением малых значений времени жизни неравновесных носителей заряда (ННЗ) в базах, низких величин падения напряжения на приборной структуре в проводящем состоянии и малых генерационных токов обратно-смещенных *p-n*-переходов, что приводит к уменьшению мощности рассеяния и увеличению запираемого напряжения. Современные исследования в этом направлении сосредоточены на достижении наилучшего сочетания частотных и статических характеристик приборов [1–8]. Дальнейшее их улучшение видится в поиске наиболее удачных решений при выборе условий радиационной обработки для конкретных типов приборных структур.

Существует два пути решения задачи повышения уровня быстродействия приборов с использованием технологии электронного облучения: во-первых, за счет введения в приборную структуру таких радиационных центров (РЦ), которые бы обеспечивали хорошее сочетание характеристик проводимости и переключения токов утечки и их температурных коэффициентов; во-вторых, за счет выбора оптимального характера распределения РЦ в базовых слаболегированных областях полупроводниковых структур.

Реализация первой возможности связана с исследованиями особенностей накопления РЦ в Si-структурах с *p-n*-переходами в зависимости от примесного и дефектного состава исходного полупроводника и различных внешних условий облучения, среди которых наиболее существенным является температура (T_{irr}). Для радиационной кремниевой технологии наиболее важен интервал $T_{\text{irr}} = 20\text{--}400$ °С, в котором лежат температуры диссоциации основных радиационных дефектов в кремнии. Необходимость таких исследований диктуется тем, что изменение T_{irr} может приводить к изменению концентрационного соотношения образующихся при облучении РЦ или даже к смене типа центра, доминирующего в кристалле [9–11]. Это, безусловно, должно повлиять на реализуемость различных режимов переноса носителей заряда в полупроводниковой структуре, и, как следствие, изменить совокупность ее электрофизических характеристик. Для структур силовых полупроводниковых приборов (СПП), прошедших полный технологический цикл изготовления, этот вопрос практически не исследован. При попытке использовать в технологиях реальных СПП данные, полученные на экспериментальных образцах [12, 13], возникает проблема неконтролируемого изменения параметров облученных быстродействующих приборов.

Реализация второй возможности делает необходимым проведение всестороннего исследования по влиянию пространственно-неоднородного распределения РЦ по кристаллу на переходные процессы и протекание тока высокой плотности в полупроводниковой структуре.

Цель настоящей работы – выяснить влияние температурного режима в процессе электронного облучения на накопление РЦ и связанное с ними изменение основных электрических характеристик технологически завершенных Si структур диодного типа.

В качестве образцов использовались чипы (приборные p^+n-n^+ -структуры до посадки в корпус) диодов, изготовленных на монокристаллическом Si, легированном фосфором в процессе выращивания по Чохральскому (КЭФ) и с помощью ядерных реакций (КОФ). Структуры были сформированы по стандартной диодной технологии на исходных пластинах двух типов: КЭФ-32 и КОФ-32 толщиной 280–350 мкм путем последовательной диффузии алюминия, бора и фосфора из их окислов на воздухе.

Отбирались p^+n-n^+ -структуры, имеющие до облучения одинаковые прямые и обратные вольтамперные характеристики (ВАХ). Прямое падение напряжения на диоде U_F измерялось (раздельные токовые и потенциальные контакты) при длительности импульса прямого тока 400 мкс в диапазоне до $I_F = 100$ А. Обратный ток I_R контролировался при постоянном смещении $U_R = 1000$ В при температуре $T_j = 25$ и 125 °С. Время жизни неравновесных носителей заряда в n -базе p^+n-n^+ - диодов τ_p контролировалось по длительности фазы высокой обратной проводимости при переключении структуры из проводящего состояния в закрытое [14]. Условия опыта (величина импульса прямого тока 1 А при длительности до 80 мкс) соответствовали высокому уровню инжекции. Для получения информации о РЦ применялась методика нестационарной емкостной спектроскопии глубоких уровней (DLTS). Спектры снимались при обратном смещении – 10 В и длительности импульса заполнения ловушек 0,01 с.

Облучение образцов проводилось на линейном импульсном ускорителе электронов с энергией частиц $E_{irr} = 6$ МэВ (длительность импульса 5 мкс, частота следования импульсов 200 Гц). Интенсивность пучка электронов, падающего на образец, составляла $2 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$, температура образцов в процессе облучения фиксировалась при 25, 100, 160, 250, 300, 350 и 400 °С и поддерживалась с точностью ± 5 °С.

Порядок эксперимента сводился к следующему. Вначале диоды облучались флюенсом (Φ) $5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$ при указанных выше температурах. Затем проводилось дополнительное облучение, цель которого – уменьшить до одинаковой величины τ_p в n -базе диодов, облучаемых в условиях различных T_{irr} . Контроль параметров образцов проводился на разных этапах облучения. Отдельные образцы отжигались после облучения в печи на воздухе при температурах в интервале 100–500 °С.

На рис. 1 представлено изменение величины $\Delta(1/\tau_p) = 1/\tau_{p\Phi} - 1/\tau_{p0}$ (τ_{p0} , $\tau_{p\Phi}$ – время жизни ННЗ до и после облучения соответственно) в диодах, изготовленных на разном исходном материале, в зависимости от температуры облучения. Приведенные данные усреднялись по результатам измерений 5–7 образцов. Рис. 2 иллюстрирует для тех же диодов зависимости прямого падения напряжения и величины приращения обратного тока $\Delta I_R = I_{R\Phi} - I_{R0}$ (I_{R0} , $I_{R\Phi}$ – величина тока до и после облучения соответственно) от T_{irr} .

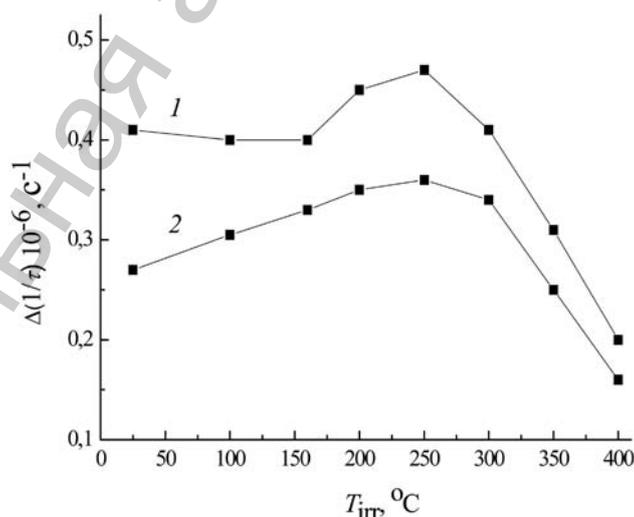


Рис. 1. Зависимость приращения величины, обратной времени жизни неравновесных носителей заряда в Si p^+n-n^+ -диодах, от температуры облучения электронами с энергией $E_{irr} = 6$ МэВ ($\Phi = 5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$):
1 – образцы на КЭФ; 2 – образцы на КОФ

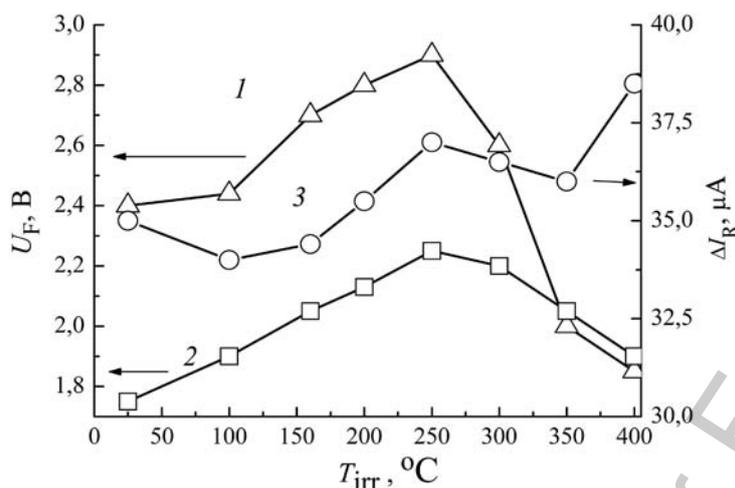


Рис. 2. Изменение прямого падения напряжения (1, 2) и приращения обратного тока (3) в Si p^+-n-n^+ -диодах от температуры облучения электронами с энергией $E_{irr} = 6$ МэВ ($\Phi = 5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$): 1, 3 – образцы на КЭФ; 2 – образцы на КОФ

Можно отметить некоторые особенности на представленных кривых $\Delta(1/\tau_p)(T_{irr})$, $U_F(T_{irr})$ и $\Delta I_R(T_{irr})$. Для структур на КЭФ при повышении температуры облучения от 20 до 160 °С величина $\Delta(1/\tau_p)$, пропорциональная эффективности введения РЦ, несколько снижается. Затем следует ее подъем в интервале $T_{irr} = 160\text{--}250$ °С, а при дальнейшем увеличении T_{irr} в изменении $\Delta(1/\tau_p)$ наступает спад. Для образцов на КОФ зависимость $\Delta(1/\tau_p)(T_{irr})$ монотонно нарастает от 20 до 250 °С и спадает в интервале 250–400 °С.

Поскольку рост U_F в облученных диодах обусловлен увеличением скорости объемной рекомбинации ННЗ в n -базе, то качественный вид зависимостей $U_F(T_{irr})$ и $\Delta(1/\tau_p)(T_{irr})$ практически одинаков и полностью соответствует физическим соображениям о взаимосвязи этих параметров, проанализированной в работе [15]. Зависимость ΔI_R от температуры облучения (рис. 2, кривая 3) до $T_{irr} > 250$ °С близка по виду к зависимости $U_F(T_{irr})$ и имеет слабо выраженную тенденцию к увеличению при $T_{irr} > 250$ °С, что отражает, вероятно, характер изменения при облучении основной компоненты обратного тока Si диода – тока генерации.

Наблюдаемое совпадение зависимости U_F и ΔI_R от T_{irr} при $T_{irr} \leq 250$ °С дает основание полагать, что в данном интервале температур облучения в определении контролируемых характеристик облученных образцов доминирует один и тот же тип РЦ, в то время как в p^+-n-n^+ -структурах, облученных при $T_{irr} > 250$ °С, генерация и рекомбинация носителей заряда идут, по-видимому, через различные РЦ.

Как известно [16], при любой температуре облучением в кристалл полупроводника вводится весь набор РЦ, возможных в кристалле с данным примесным составом, однако в изменении свойств доминирует несколько вполне определенных РЦ, стабильных при данной температуре. В спектре ловушек основных носителей заряда в базовом слое облученных p^+-n-n^+ -диодов мы наблюдали в общей сложности четыре DLTS-пики, связанные с уровнями дефектов. Во первых, дефект E1 -А- центр, ($E_C - 0,17$ эВ, сечение захвата электронов $\sigma_n = 2 \cdot 10^{-14} \text{ см}^2$). Далее уровень E2 ($E_C - 0,23$ эВ, $\sigma_n = 2 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$), принадлежащий двукратно отрицательно заряженному состоянию дивакансии. Затем пик E3 ($E_C - 0,35$ эВ, $\sigma_n = 2 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$). За пик E4 ($E_C - 0,42$ эВ, $\sigma_n = 2 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$) ответственны, по крайней мере, два центра: E-центр (вакансия – фосфор) и дивакансия (однократно отрицательно заряженное состояние). Наблюдавшиеся уровни типичны для $p-n$ -структур на n -Si [16]. Каждый из этих комплексов характеризуется определенной энергией связи. По мере повышения температуры облучения наступает диссоциация наименее устойчивых РЦ, что приводит к перестройке и изменению концентрационного соотношения образующихся при облучении РЦ. При этом основным РЦ, контролирующим темп рекомбинации ННЗ в электронно-облученных структурах, принято считать уровень E1, а после его распада при отжиге – уровень E3 [17].

Проблема создания силовых и быстродействующих полупроводниковых приборов с помощью радиационной технологии связана с достижением разумного компромисса в сочетании

совокупности статических и частотных характеристик приборов, которые имеют противоположный характер зависимости от времени жизни неравновесных носителей заряда в полупроводниковой структуре. Оценим возможности использования электронного облучения при повышенных температурах для решения этой технологической задачи.

Анализ DLTS-спектров и данных по отжигу образцов, облученных при различных температурах, позволяет сделать вывод о том, что поведение $\Delta(1/\tau_p)$, ΔI_R и U_F при $T_{irr} \leq 250$ °C связано с характером зависимости от температуры облучения эффективности накопления уровня E1 и его доминированием в генерационно-рекомбинационных процессах в облученных диодах. В образцах, облученных при более высокой температуре (>250 °C), на эти процессы сказывается, по-видимому, влияние и центра E3, которое по мере повышения T_{irr} будет возрастать. Эффективность введения этого центра, так же как и центра E1, монотонно снижается при $T_{irr} > 150$ °C, но он имеет более высокую, чем E1, термостабильность (~ 500 °C) [12,17]. Допустимо предположить, что изменение концентрационного соотношения E1 и E3, может повлечь за собой изменение электрических характеристик диодов.

Таблица. Параметры диодных структур, облученных при различных температурах электронами с энергией 6 МэВ

Температура облучения	Материал КЭФ-32 Флюенс облучения				Материал КОФ-32 Флюенс облучения			
	τ_p , мкс	U_F , В ⁽¹⁾	I_R , μ А ⁽²⁾	I_R , μ А ⁽³⁾	τ_p , мкс	U_F , В ⁽¹⁾	I_R , μ А ⁽²⁾	I_R , μ А ⁽³⁾
25 °C	$\Phi = 6 \cdot 10^{13}$ см ⁻²				$\Phi = 9,5 \cdot 10^{13}$ см ⁻²			
	2,0	2,4	100	1000	2,0	2,35	80	800
250 °C	$\Phi = 5 \cdot 10^{13}$ см ⁻²				$\Phi = 8,5 \cdot 10^{13}$ см ⁻²			
	2,0	2,9	100	800	2,0	2,85	100	500
300 °C	$\Phi = 6,5 \cdot 10^{13}$ см ⁻²				$\Phi = 1,5 \cdot 10^{14}$ см ⁻²			
	2,0	2,15	100	500	2,0	2,4	150	400
350 °C	$\Phi = 1 \cdot 10^{14}$ см ⁻²				$\Phi = 2,5 \cdot 10^{14}$ см ⁻²			
	2,0	2,0	150	600	2,0	2,1	140	600
400 °C	$\Phi = 4 \cdot 10^{14}$ см ⁻²				$\Phi = 9 \cdot 10^{14}$ см ⁻²			
	2,0	1,8	300	3000	2,0	1,75	250	2500

Условия измерений

1- $T_j = 25$ °C; $I_F = 50$ А; 2- $T_j = 25$ °C; 3- $T_j = 125$ °C. Исходное время жизни в диодах $\tau_{p0} \cong 20$ мкс.

Следует подчеркнуть, что для корректной оценки степени влияния температуры облучения на чувствительность изменения U_F и I_R и выбора оптимального с точки зрения технологии режима радиационной обработки, необходимо провести сравнение величин U_F и I_R в образцах с одинаковым уровнем τ_p . Результат такого исследования представлен в таблице. Здесь приведены значения параметров p^+n-n^+ -диодов, рассчитанных на прямой ток 10–15 А и заперное напряжение 1600 В, изготовленных на n -Si марки КЭФ-32 и КОФ-32, после облучения при $T_{irr} = 25, 250, 300, 350$ и 400 °C. Обратим внимание на то, что для выравнивания τ_p в образцах требуются различные дозы облучения. Так, например, для уменьшения τ_p до уровня $\tau_p = 2$ мкс в диодах на КЭФ при $T_{irr} = 25$ °C, необходим флюенс $\Phi = 6 \cdot 10^{13}$ см⁻², а при $T_{irr} = 400$ °C – $\Phi = 4 \cdot 10^{14}$ см⁻². Для образцов на КОФ при аналогичных условиях облучения требуется $\Phi = 9,5 \cdot 10^{13}$ см⁻² и $\Phi = 9 \cdot 10^{14}$ см⁻² соответственно.

Как видно из данных, приведенных в таблице, температурный режим действительно играет существенную роль в определении электрических характеристик p^+n-n^+ -диодов при электронном облучении. Так, наилучшее соотношение между величиной τ_p и U_F может быть получено при $T_{irr} = 400$ °C. По-видимому, это является следствием образования в p^+n-n^+ -диодах в условиях данного воздействия наилучшего для сочетания этих характеристик концентрационного соотношения E1 и E3. Установлено, что для этого случая оно равно ~1:4. Однако обратный ток диода при этом имеет максимальное значение. Более предпочтительным режимом является $T_{irr} = 300$ °C для приборов на обычном Si (КЭФ) и $T_{irr} = 350$ °C – для приборных структур на ядерно-легированном Si (КОФ). В этих условиях облучения соотношение концентраций E1 и E3 в образцах

составляет ~2:3. Такое сочетание доминирующих уровней в диодах обеспечивает достаточно низкое U_F и небольшой рост I_R при изменении температуры эксплуатации от 25 до 125 °С. Механизм формирования ВАХ облученных диодов при наличии в их базовой области определенной комбинации радиационных центров остается пока невыясненным.

В последующей работе мы надеемся подробно исследовать инжекционные зависимости τ_p для разных центров рекомбинации, установить их взаимосвязь с характеристиками обратного восстановления, используя для этих целей более широкий набор образцов.

Таким образом, выполненное исследование показало, что главным условием оптимизации параметров Si диодов при электронном облучении как наиболее распространенной на сегодняшний день разновидности технологии управления быстродействием, является точный подбор температурного режима этого вида обработки для конкретного изделия. Так, для p^+n-n^+ -диодов, полученных на n -Si (КЭФ, КОФ), при одинаковой величине τ_p в базовом слое диодов, прямое падение напряжения можно снизить до 30% и в ~ 2–3 раза уменьшить зависимость обратного тока от температуры эксплуатации в случае их облучения при $T_{irr} = 300$ °С (КЭФ) или при $T_{irr} = 350$ °С (КОФ), по сравнению с другими температурами диапазона $T_{irr} = 20$ –400 °С.

Для получения максимального эффекта от этого приема проведению операции облучения основной партии приборов должна предшествовать процедура контрольного облучения тестовых структур, которые прошли полный цикл тех же технологических обработок, что и приборы основной партии.

Авторы выражают благодарность С. Б. Ластовскому за помощь в проведении DLTS-измерений.

Литература

1. Козлов В. А., Козловский В. В. // ФТП. 2001. Т. 35, вып. 7. С. 769–795.
2. Jankovic N., Igc P., Sakurai N. // Sol.-St. Electronics. 2010. Vol. 54, N 3. P. 268–276.
3. Сурма А. М. // Электричество. 2006. № 9. С. 21–31.
4. Hazdra P., Vobecky J., Dorschner H. // J. Microelectronics. 2004. Vol. 35, N 2. P. 249–257.
5. Губарев В. Н., Сурма А. М., Ковров А. В. // Прикладная физика. 2001. № 4. С. 85–92.
6. Марченко И. Г., Жданович Н. Е. // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36, вып. 10. С. 45–51.
7. Марченко И. Г., Жданович Н. Е. // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37, вып. 17. С. 26–34.
8. Коришунов Ф. П., Марченко И. Г., Жданович Н. Е. // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 3. С. 81–85.
9. Вавилов В. С., Глазман В. Б., Исаев Н. У. и др. // ФТП. 1974. Т. 8, вып. 3. С. 471–475.
10. Коришунов Ф. П., Марченко И. Г. // ФТП. 1983. Т. 17, вып. 3. С. 540–542.
11. Коришунов Ф. П., Марченко И. Г. // ДАН БССР. 1985. Т. 29, № 6. С. 523–526.
12. Пагава Т. А. // ФТП. 2006. Т. 40, вып. 8. С. 919–921.
13. Пагава Т. А., Майсурадзе Н. И. // ФТП. 2009. Т. 43, вып. 6. С. 750–754.
14. Lax V. and Neustadter S. F. // J. Appl. Phys. 1954. Т. 25, N 9. P. 1148–1154.
15. Коришунов Ф. П., Гатальский Г. В., Иванов Г. М. Радиационные эффекты в полупроводниковых приборах. Минск, 1978.
16. Вопросы радиационной технологии полупроводников / Под ред. Л. С. Смирнова. Новосибирск, 1980.
17. Коришунов Ф. П., Марченко И. Г., Жданович Н. Е. // ДАН БССР. 1988. Т. 32, № 8. С. 781–784.

F. P. KORSHUNOV, I. G. MARCHENKO

INFLUENCE OF ELECTRON IRRADIATION AT ELEVATED TEMPERATURES ON SILICON DIFFUSE STRUCTURES WITH p - n -JUNCTIONS

Summary

The behavior of the lifetime of nonequilibrium carriers (τ), reverse current (I_R), and forward voltage drop (U_F) in industrial p^+n-n^+ -diodes irradiated with electrons ($E = 6$ MeV) at temperatures for the range $T_{irr} = 20$ –400 °С was investigated. The tests were conducted on the samples manufactured on phosphorous doped single-crystal Si during the CZ growing process of ingot (KAF) and using the nuclear reactions (KOF). The investigation showed that the problem to reach smaller τ values with a minimal increase of U_F and I_R in fast diodes can be solved by means of selection of a technological irradiation temperature regime. It was determined that the comparable changes of the τ value in the diode base area, the best trade-off of U_F and I_R in the samples (KAF) is observed at $T_{irr} = 300$ °С, and in the KOF samples at $T_{irr} = 350$ °С.

УДК 537.622

В. М. РЫЖКОВСКИЙ, В. С. ГОНЧАРОВ

МАГНИТНАЯ СТРУКТУРА СПЛАВА $Mn_{1,3}Sb$
ПО ДАННЫМ НЕЙТРОННОЙ ДИФРАКЦИИ

Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению

(Поступила в редакцию 16.12.2011)

Введение. Соединение $MnSb$ имеет широкую область однофазности при изменении содержания Mn , что позволяет рассматривать сплавы $Mn_{1+x}Sb$ как переменную фазу с изменяющимися в широких пределах в зависимости от состава и внешних воздействий физическими свойствами. Из литературных данных известно, что область однофазности рассматриваемых сплавов простирается до $x \sim 0,25$ [1, 2]. Моноантимонид $MnSb$ кристаллизуется в гексагональной структуре типа $NiAs$ (пр. гр. $R\bar{6}_3/mmc$ (194)), в которой марганцем заполнены все октаэдрические междуузлия (узлы решетки на рис. 1) гексагональной плотноупакованной решетки анионов, а бипирамидальные междуузлия вакантны. При содержании марганца сверх эквимолярного состава избыточные атомы Mn занимают часть бипирамидальных междуузлий. Поэтому кристаллическую структуру $Mn_{1+x}Sb$ следует классифицировать как промежуточную между структурами типа $NiAs$ и Ni_2In , которые, относясь к одной и той же пространственной группе, различаются степенью заполнения бипирамидальных междуузлий (в первой они вакантны, во второй – заполнены). При этом очень чувствительными к избытку марганца оказываются магнитные характеристики материалов.

В работе [3] нами показано, что при закалке от температуры синтеза однофазные образцы с гексагональной кристаллической структурой образуются до состава $Mn_{1,3}Sb$, а воздействие на исходные образцы высокого давления и температуры расширяет область однофазности сплавов с гексагональной кристаллической структурой до состава $Mn_{1,5}Sb$. Магнитные свойства этих сплавов исследованы в работе [4].

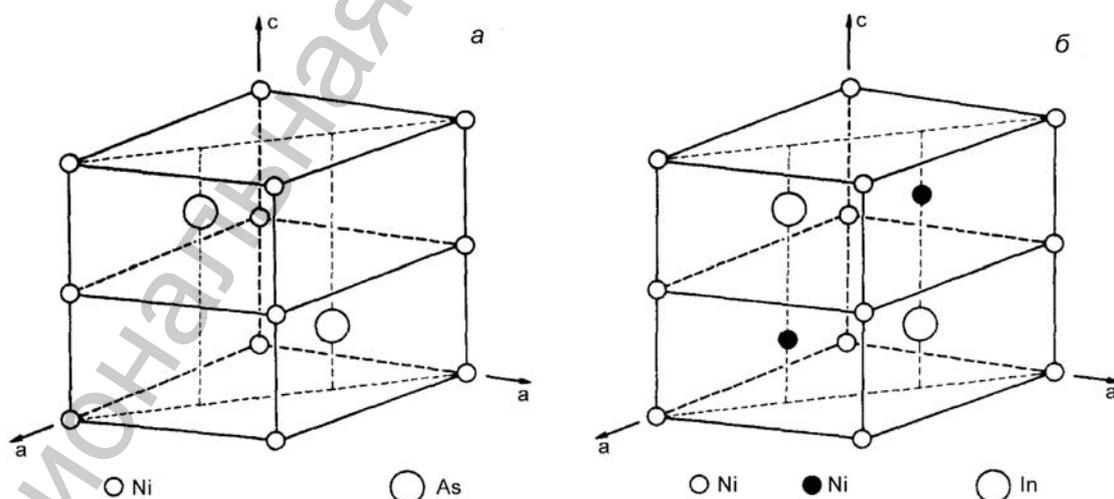


Рис. 1. Кристаллические структуры $NiAs$ (а), Ni_2In (б)

К сожалению, о магнитном упорядочении в сплавах $Mn_{1+x}Sb$ до сих пор нет единой точки зрения. Дискуссионными являются два модельных подхода с различной интерпретацией роли междоузельных атомов Mn в формировании магнитного состояния сплавов с избытком в них марганца сверх эквиатомного состава.

Авторы первой модели предполагают, что атомы Mn в бипирамидальных междоузлиях не несут индивидуальных магнитных моментов, однако оказывают влияние на электронную структуру атомов Mn в узлах решетки, снижая величину их магнитных моментов при увеличении x и изменяя при этом результирующие магнитные характеристики [5, 6].

Вторая модель описывает магнитное состояние сплавов $Mn_{1+x}Sb$ как двухподрешеточное, в котором две магнитные подрешетки – узловая, состоящая из атомов Mn в узлах решетки, и междоузельная, образованная атомами Mn в бипирамидальных междоузлиях, – с различными по величине и противоположно направленными магнитными моментами определяют результирующее ферромагнитное упорядочение сплава [7, 8].

С целью установления реальной магнитной структуры однофазных сплавов $Mn_{1+x}Sb$ ($x > 0$) как исходных, так и подвергнутых высокому давлению и температуре ($P = 7$ ГПа, $T = 2300$ К) в настоящей работе были проведены нейтронографические исследования исходных и термобарически обработанных сплавов $Mn_{1,3}Sb$ при температурах 300 и 77 К.

Методика эксперимента. В качестве исходных материалов использовали сурьму марки СО (99,99 %) и марганец электролитический (99,90 %).

Поликристаллические сплавы $Mn_{1,3}Sb$ получали методом прямого сплавления порошков исходных компонентов. Сплавление происходило в однозонной печи сопротивления в алундовом тигле, помещенном в вакуумированную до 0,1 Па кварцевую ампулу. Температура в печи постепенно повышалась до 1350 К с промежуточной выдержкой в течение 4 ч при 1200 К. При температуре 1350 К ампула выдерживалась еще 4 ч и закалялась в холодной воде. Полученные слитки растирались в порошок, из которого прессовались таблетки для термобарического синтеза.

Термобарическую обработку образцов проводили с использованием аппаратуры, подробно описанной в статье [9]. В настоящей работе образцы подвергались воздействию квазигидростатического давления $P = 7$ ГПа в течение 10 мин при температуре $T = 2300$ К с последующей закалкой под давлением.

Дифракционные данные исследованных сплавов получены при атмосферном давлении. Для обработки дифрактограмм использовалась программа FullProf [10]. Точность определения параметров элементарных ячеек не ниже 0,0005 нм.

Нейтронографические измерения выполнены в Российском научном центре «Курчатовский институт» (г. Москва, Россия) с помощью дифрактометра ДИСК на реакторе ИР-8. Длина волны нейтронов $\lambda = 0,1668$ нм. Объем исследуемых образцов составлял ~ 200 мм³. Обработка данных проводилась методом Ритвельда [11].

Результаты и их обсуждение. При обработке дифракционных данных методом Ритвельда установлено, что наилучшее соответствие экспериментальных и рассчитанных нейтронограмм достигается при использовании в расчетах модели, в которой магнитные моменты m_1 атомов Mn в узлах решетки (положение $2a$ с координатами (0, 0, 0), (0, 0, 1/2) пространственной группы $R\bar{6}_3/mmc$) направлены антипараллельно магнитным моментам m_2 атомов Mn в бипирамидальных междоузлиях (положение $2d$ с координатами (1/3, 2/3, 3/4), (2/3, 1/3, 1/4) пространственной группы $R\bar{6}_3/mmc$). Фон описывался полиномом шестой степени, дифракционные максимумы аппроксимировались функцией Гаусса, тепловые факторы атомов Mn и Sb фиксировались равными $B_{Mn} = B_{Sb} = 0,05$ нм. При расчете учитывался вклад от примесной фазы MnO, количество которой составляло не более 3 %.

На рис. 2 и 3 приведены нейтронограммы исходного и термобарически обработанного ($P = 7$ ГПа, $T = 2300$ К) сплавов $Mn_{1,3}Sb$ при $T = 300$ и 77 К. На рисунках показаны экспериментальные точки, вычисленный профиль, разностная кривая, положения и индексы дифракционных максимумов.

Значения структурных и магнитных характеристик сплава $Mn_{1,3}Sb$, как исходного, так и подвергнутого термобарическому воздействию, при различных температурах, полученные

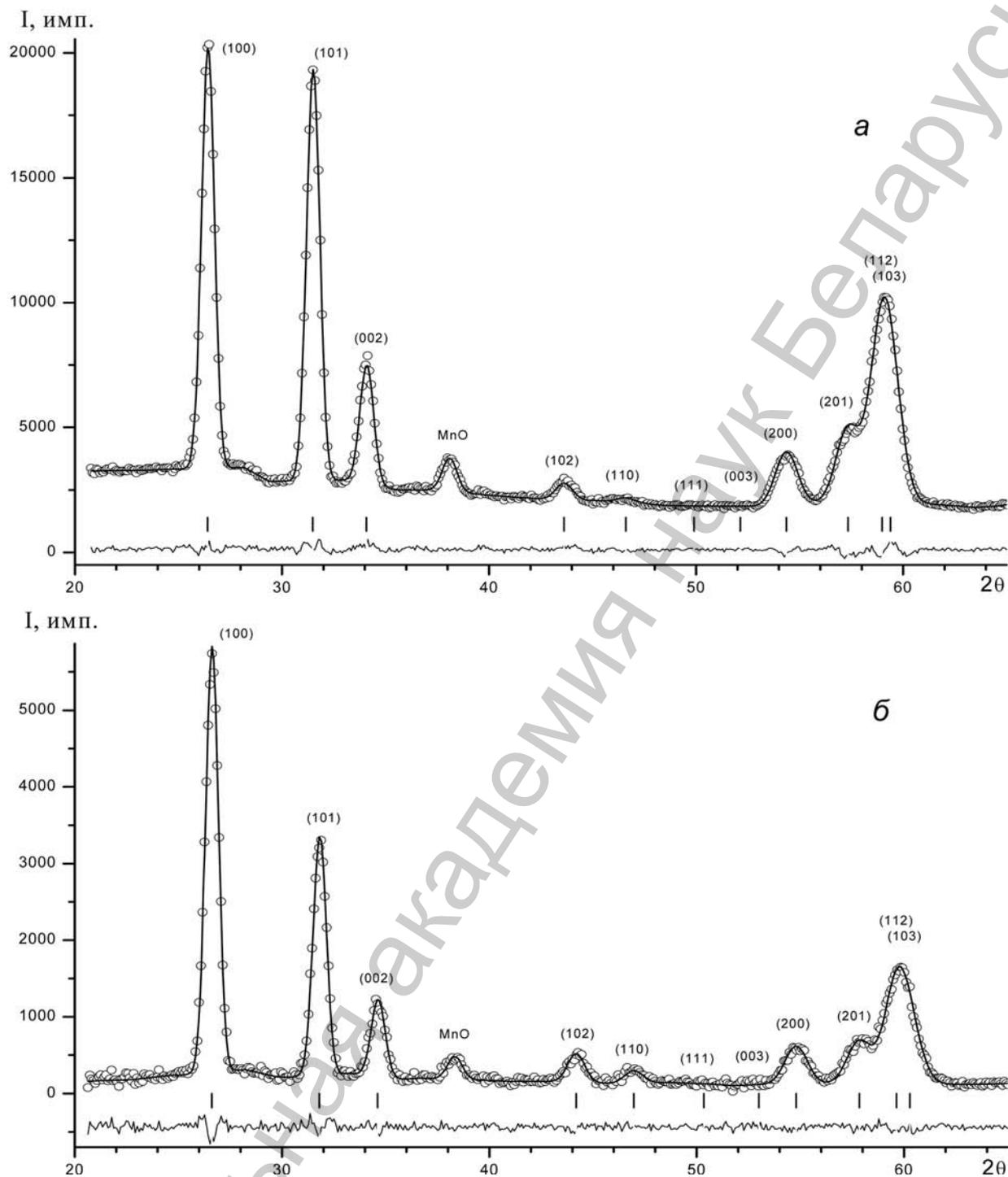


Рис. 2. Наблюдаемый и рассчитанный спектры нейтронной дифракции исходного сплава $Mn_{1.3}Sb$ при $T = 300(a)$ и $77 (б)$ К

в результате обработки экспериментальных данных, приведены в таблице. Здесь же указаны параметры кристаллической решетки a и c , магнитные моменты атомов Mn октаэдрических междуузлиях m_1 и в бипирамидальных междуузлиях m_2 , угол отклонения φ магнитных моментов от гексагональной оси C , средний магнитный момент на атом Mn m_{cp} , полученный из нейтронографических данных, средний магнитный момент на атом Mn m_m , полученный из магнитных измерений [4], профильный R_p и магнитный R_m факторы соответствия, полученные при уточнении магнитной структуры закаленного сплава $Mn_{1.3}Sb$ при температурах $T = 300$ и 77 К.

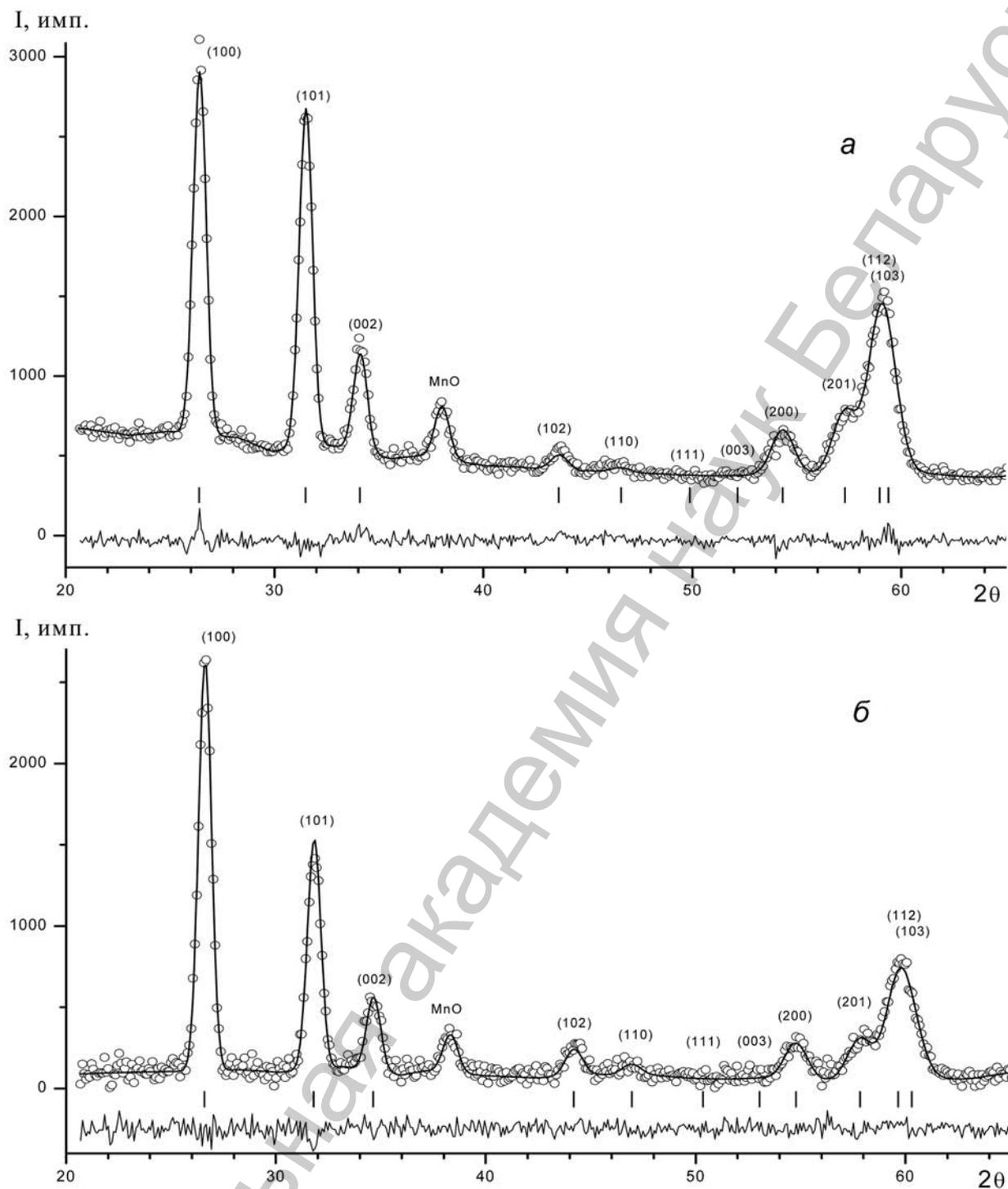


Рис. 3. Наблюдаемый и рассчитанный спектры нейтронной дифракции термобарически обработанного сплава $Mn_{1.3}Sb$ при $T = 300(a)$ и $77(b)$ К

Низкие значения факторов соответствия, а также хорошая подгонка расчетного спектра к экспериментальным данным свидетельствуют о высокой достоверности предложенной модели магнитной структуры.

Следует отметить, что значения факторов соответствия для данных, полученных при температуре 77 К, оказались несколько более высокими, чем для данных, полученных при температуре 300 К, по причине меньшей интенсивности рефлексов на нейтронограммах, снятых при $T = 77$ К, что, в свою очередь, связано с необходимостью применения рефрижератора для охлаждения образца и поддержания его температуры в процессе измерения.

Таблица. Параметры кристаллической решетки, магнитные характеристики атомов Mn и факторы соответствия

Параметры	Исходный		После термобарической обработки	
	300	77	300	77
T , К	300	77	300	77
a , нм	0,4216	0,4186	0,4218	0,4186
c , нм	0,5692	0,5607	0,5691	0,5603
m_1 , μ_B	1,33	3,10	1,45	3,08
m_2 , μ_B	1,40	2,24	1,50	2,47
φ , град.	0	30	0	30
m_{cp} , μ_B	0,95	2,50	1,00	2,41
m_m , μ_B	0,9	2,4	0,9	2,4
R_p , %	2,03	6,74	3,57	8,32
R_m , %	4,18	5,42	6,68	5,97

Также обратим внимание, что при снижении температуры от 300 до 77 К магнитные моменты в подрешетках отклоняются от гексагональной оси C на угол 30° . Структурные и магнитные характеристики исходного и термобарически обработанного сплавов отличаются незначительно.

Заключение. Таким образом, установлено, что исходные и термобарически обработанные сплавы $Mn_{1,3}Sb$ при температурах 300 и 77 К обладают двухподрешеточным ферромагнитным упорядочением. В магнитной структуре направления различных по величине магнитных моментов атомов марганца в октаэдрических узлах и в бипирамидальных междуузлиях антипараллельны. Определены величины атомных магнитных моментов при различных температурах.

Авторы выражают благодарность С. С. Агафонову, В. П. Глазкову, В. А. Соменкову за помощь в организации и проведении нейтронографического эксперимента.

Литература

1. Teramoto I., van Run A. M. J. G. // J. Phys. Chem. Solids. 1968. Vol. 29. P. 347–355.
2. Ванярко В. Г., Мощалкова Н. А., Гунченко В. М., Фадеева Н. В. // Неорганические материалы. 1988. Т. 24, № 6. С. 900–903.
3. Рыжковский В. М., Гончаров В. С. // Физика и техника высоких давлений. 2007. Т. 17, № 2. С. 53–58.
4. Гончаров В. С., Рыжковский В. М., Янушкевич К. И. // Вестник ФФИ. 2007. № 4. С. 105–109.
5. Yamaguchi Y., Watanabe H., Suzuki T. // J. Phys. Soc. Jap. 1976. Vol. 41, N 2. P. 703–704.
6. Reimers W., Hellner E., Treutmann W. // J. Phys. Chem. Solids. 1983. Vol. 44, N 3. P. 195–204.
7. Bouwma J., van Bruggen C. F., Haas C. // J. de Physique. 1971. Vol. 32, N 2–3. P. C 1–78–C 1–80.
8. Okita T., Makino Y. // J. Phys. Soc. Jap. 1968. Vol. 25, N 1. P. 120–124.
9. Гончаров В. С., Рыжковский В. М. // Неорганические материалы. 2005. Т. 41, № 6. С. 647–649.
10. Rodriguez-Cravaljal J. // Physica B: Condens. Matter. 1993. Vol. 192, N 1–2. P. 55–69.
11. Rietveld H. M. // J. Appl. Crystallogr. 1969. Vol. 2, N 2. P. 65–71.

V. M. RYZHKOVSKII, V. S. GONCHAROV

MAGNETIC STRUCTURE OF THE $Mn_{1,3}Sb$ ALLOY FROM THE NEUTRON DIFFRACTION DATA

Summary

The neutron-diffraction study of the initial and thermobaric-treated ($P = 7$ GPa, $T = 2300$ K) $Mn_{1,3}Sb$ alloys is realized. It is established that at temperatures of 300 and 77 K, alloys are ferrimagnets. The magnetic structure consists of two sublattices of manganese atoms in the octahedral sites and in the bipyramidal interstitial sites with antiparallel directed and different-magnitude of atomic magnetic moments.

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.6

Н. А. ЛИХОДЕД, П. И. СОБОЛЕВСКИЙ

ОДНОРОДНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ В АЛГОРИТМАХ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ТАЙЛАМИ

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 03.09.2010)

Введение. Одним из этапов отображения алгоритмов на параллельные компьютеры с распределенной памятью является получение тайлов, называемых также зернами вычислений. Под тайлом понимается множество операций, выполняемых атомарно, как одна единица вычислений. Все необходимые коммуникации – прием данных, необходимых для выполнения операций тайла, и передача результатов вычислений – осуществляются соответственно до и после выполнения операций тайла. Обычно исследуются тайлы, геометрически интерпретируемые как параллелепипеды с заданными фиксированными размерами [1–3]. На практике, однако, часто используются тайлы упрощенного вида: некоторые размеры тайла фиксируются своими граничными (минимально или максимально возможными) значениями.

В этой работе исследуются некоторые аспекты такого упрощенного тайлинга алгоритмов с однородными зависимостями. При выполнении условий, не являющихся ограничительными для практического использования, получены выражения для явного описания всех зависимостей уровня тайлов. Знание этих зависимостей необходимо для задания коммуникационных операций алгоритма, разбитого на тайлы. Показано также, как следует выбирать свободные размеры упрощенных тайлов для минимизации времени реализации алгоритма на кольце процессоров.

Техника тайлинга. Будем рассматривать n -мерные алгоритмы с однородными зависимостями, записанные в виде гнезда тесно вложенных циклов. Алгоритмы такого вида характеризуются областью вычислений V и множеством векторов зависимостей Φ . Пусть область вычислений (индексное множество) есть n -мерный параллелепипед $V = \{v \in \mathbb{Z}^n \mid 1_n \leq v \leq I\}$, где $1_n = (1, 1, \dots, 1)$, $I = (I_1, I_2, \dots, I_n) \in \mathbb{Z}^n$. Все матричные и векторные неравенства в данной работе имеют смысл «для каждого элемента». Реализацию выполняемого оператора при конкретных значениях вектора параметров цикла v будем называть операцией. Выполнение всех операций при фиксированном v называется итерацией. Каждой точке области вычислений $v \in V$ соответствует одна итерация последовательного алгоритма. Множество векторов зависимостей отражает информационные зависимости между операциями.

Техника тайлинга включает в себя разбиение арифметического пространства \mathbb{Z}^n , а следовательно и области вычислений V алгоритма, n семействами параллельных гиперплоскостей на множество n -мерных параллелепипедов-тайлов. Семейства гиперплоскостей задаются множеством $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ из n целочисленных линейно независимых векторов с взаимно простыми координатами. Каждому семейству ставится в соответствие вектор $h_m \in \mathbb{Z}^n$, который является нормальным для гиперплоскостей этого семейства. Количество гиперплоскостей с нормальным вектором h_m , проходящих через целочисленные точки одного тайла, будем обозначать r_m , а диагональную матрицу, составленную из этих величин – $R = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n)$. Матрица R определяет размеры и размерность тайла. Обозначим через $H = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ матрицу, строки которой составлены из координат нормальных векторов гиперплоскостей. В данной работе матрицу H

будем считать неотрицательной (все элементы матрицы являются целыми неотрицательными числами). В этом случае минимальное значение функции Hv достигается в точке 1_n : $\min_{v \in V} Hv = H1_n$. Матрицу H будем также считать унимодулярной (определитель матрицы равен по модулю единице), что позволяет получать тайлы без дополнительных требований делимости диагональных элементов матрицы R ; кроме того, в этом случае все гиперплоскости пересекаются в точках с целочисленными координатами [4].

П р и м е р. Рассмотрим основную часть алгоритма численного решения задачи Дирихле многомерного уравнения Пуассона методом верхней релаксации:

```

for  $i_1=1$  to  $I_1$  do
  for  $i_2=1$  to  $I_2$  do
    .....
    for  $i_n=1$  to  $I_n$  do
      begin
         $y(i_2, i_3, \dots, i_n) = F(y(i_2-1, i_3, \dots, i_n), y(i_2, i_3-1, \dots, i_n), \dots, y(i_2, i_3, \dots, i_n-1),$ 
           $y(i_2, i_3, \dots, i_n), y(i_2+1, i_3, \dots, i_n), y(i_2, i_3+1, \dots, i_n), \dots, y(i_2, i_3, \dots, i_n+1))$ 
      end

```

Область вычислений для данного алгоритма есть подмножество точек целочисленного пространства Z^n , определяемое как $V = \{v(i_1, i_2, \dots, i_n) \in Z^n \mid 1 \leq i_m \leq I_m, m = 1, 2, \dots, n\}$. Множество из $2n - 1$ векторов зависимостей $\Phi = \{\varphi_1 = e_1, \varphi_k = e_k, \varphi_k^- = e_1 - e_k, k = 2, 3, \dots, n\}$ отражает информационные зависимости между операциями алгоритма. Составим матрицу H из следующих нормальных векторов гиперплоскостей:

$$h_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad h_m = \left(1, 0, \dots, 0, \underset{(m)}{1}, 0, \dots, 0 \right), \quad m = 2, 3, \dots, n.$$

При указанном выборе нормальных векторов в каждой гиперплоскости содержится $n - 1$ вектор зависимостей.

В каждом тайле имеется $\prod_{m=1}^n r_m$ целочисленных точек пересечения гиперплоскостей, проходящих через тайл. Будем обозначать это множество $Z_{j^{gl}}^n$. Разбиение пространства Z^n (и области $V \subset Z^n$) на тайлы $j^{gl} \in Z^n$ можно представить в виде двойного векторного неравенства

$$R(j^{gl} - 1_n) \leq H(v - 1_n) \leq Rj^{gl} - 1_n, \quad v \in Z_{j^{gl}}^n. \quad (1)$$

Пусть $V_{j^{gl}}$ – множество точек $v \in V$, принадлежащих тайлу $j^{gl} \in Z^n$ (удовлетворяющих при фиксированном $j^{gl} \in Z^n$ неравенству (1)). Тогда если $V_{j^{gl}} = Z_{j^{gl}}^n$, то тайл j^{gl} будем называть полным, если $V_{j^{gl}} \subset Z_{j^{gl}}^n, V_{j^{gl}} \neq \emptyset$, то неполным, а если $V_{j^{gl}} = \emptyset$, то пустым. В работах [5, 6] получены аппроксимации области, занимаемой множеством непустых тайлов, n -мерными многогранниками, в частности, n -мерными параллелепипедами. Найденный объем этих многогранников позволяет выбрать среди них многогранник, содержащий меньше всего пустых тайлов. Множество непустых тайлов, покрывающих область V , будем обозначать $V^{gl} \subset Z^n$. Формальное определение множества V^{gl} следует из неравенства (1): $V^{gl} = \{j^{gl} \in Z^n \mid j^{gl} = 1_n + \lfloor R^{-1}H(v - 1_n) \rfloor, v \in V\}$. Укажем пределы изменения координат тайлов: $1_n \leq j^{gl} \leq Q, Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = 1_n + \lfloor R^{-1}H(I - 1_n) \rfloor = \lfloor R^{-1}(H(I - 1_n) + 1_n) \rfloor, Q_m = \lceil r_m^{\max} / r_m \rceil, r_m^{\max} = \sum_{k=1}^n h_{mk}(I_k - 1) + 1, m = 1, 2, \dots, n.$

В каждом тайле $j^{gl} \in Z_{j^{gl}}^n$ введем локальную систему координат, определяемую множеством векторов $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$. Поставим в соответствие каждой точке $v \in Z_{j^{gl}}^n$ тайла радиус-вектор, составленный из локальных координат этой точки $j^{loc} = (j_1^{loc}, j_2^{loc}, \dots, j_n^{loc}) = 1_n + H(v - v_{j^{gl}}^{\min})$, где

$v_{j^{gl}}^{\min} = H^{-1}R(j^{gl} - 1_n) + 1_n$. Координата j_m^{loc} вектора j^{loc} определяется порядковым номером гиперплоскости с нормальным вектором h_m , проходящей через точку $v \in Z_{j^{gl}}^n$ тайла j^{gl} . Нумерация плоскостей возрастает в направлении вектора h_m .

Определим $V_{j^{gl}}^{loc}$ – множество точек тайла j^{gl} , выраженных в локальных координатах:

$$V_{j^{gl}}^{loc} = \left\{ j^{loc} \in Z^n \mid 1_n \leq j^{loc} \leq R1_n, 1_n \leq v_{j^{gl}}^{\min} + H^{-1}(j^{loc} - 1_n) \leq I \right\}.$$

Равенство

$$v = v_{j^{gl}}^{\min} + H^{-1}(j^{loc} - 1_n) \in V_{j^{gl}}^{loc}, j^{loc} \in V_{j^{gl}}^{loc}, \quad (2)$$

устанавливает соответствие между локальными и глобальными координатами точки $v \in V_{j^{gl}}$.

Будем рассматривать тайлинг (тайл) в случае, когда для части диагональных элементов матрицы R зафиксированы их граничные значения:

$$r_p = r_p^{\min} = 1, p \in \sigma^{\min} \subset \{1, 2, \dots, n\}, r_p = r_p^{\max} = \sum_{k=1}^n h_{pk}(I_k - 1) + 1, p \in \sigma^{\max} \subset \{1, 2, \dots, n\}.$$

Пусть σ^0 – множество индексов остальных диагональных элементов матрицы R .

Использование в матрице R в качестве диагонального элемента r_p числа r_p^{\max} приводит к уменьшению размерности тайлов. В этом случае $Q_p = 1$ и $j_p^{gl} = 1, p \in \sigma^{\max}$. Использование в матрице R в качестве диагонального элемента r_p числа $r_p^{\min} = 1$ означает, что через каждый тайл проходит только одна гиперплоскость с нормальным вектором h_p . В этом случае $j_p^{loc} = 1, p \in \sigma^{\min}$, количество точек $v \in V_{j^{gl}}$ в полном тайле j^{gl} равно $|R| = \prod_{k \in \sigma^0} r_k \prod_{q \in \sigma^{\max}} r_q^{\max}$.

З а м е ч а н и е 1. Если тайл j^{gl} полный, то

$$V_{j^{gl}}^{loc} = \left\{ j^{loc} \in Z^n \mid 1_n \leq j^{loc} \leq R1_n \right\} = \left\{ j^{loc} \in Z^n \mid j_p^{loc} = 1, p \in \sigma^{\min}, 1 \leq j_p^{loc} \leq r_p, p \in \sigma^0, 1 \leq j_p^{loc} \leq r_p^{\max}, p \in \sigma^{\max} \right\}.$$

Если тайл j^{gl} неполный, то в определении множества $V_{j^{gl}}^{loc}$ добавляются неравенства $1 \leq v_{j^{gl}, p}^{\min} + \frac{1}{\det H} \sum_{i \in \sigma^0 \cup \sigma^{\max}} A_{ip} (j_i^{loc} - 1) \leq I_p, p = 1, 2, \dots, n$, где $v_{j^{gl}, p}^{\min}$ – координата с номером p вектора $v_{j^{gl}}^{\min}$, A_{ip} – алгебраическое дополнение элемента h_{ip} матрицы H .

П р и м е р (продолжение). Рассмотрим тайлинг для случая $\sigma^{\min} = \{1\}, \sigma^0 = \{2\}, \sigma^{\max} = \{3, 4, \dots, n\}, r_m^{\max} = I_1 + I_m - 1, m = 3, 4, \dots, n$. Количество точек в полном тайле задается формулой $|R| = r_2 \prod_{m=3}^n (I_1 + I_m - 1)$. Множество тайлов V^{gl} содержится в многограннике

$$\tilde{V}^{gl} = \left\{ (j_1^{gl}, j_2^{gl}, 1, \dots, 1) \in Z^n \mid 0 \leq r_2 j_2^{gl} - j_1^{gl} \leq r_2 + I_2 - 2, 1 \leq j_1^{gl} \leq I_1, 1 \leq j_2^{gl} \leq \lceil (I_1 + I_2 - 1) / r_2 \rceil \right\},$$

который, в свою очередь, содержится в аппроксимирующем его параллелепипеде [5]

$$\tilde{U}_{n,n-1} = \left\{ (j_1^{gl}, j_2^{gl}, 1, \dots, 1) \in Z^n \mid 0 \leq r_2 j_2^{gl} - j_1^{gl} \leq r_2 + I_2 - 2, 1 \leq j_2^{gl} \leq \lceil (I_1 + I_2 - 1) / r_2 \rceil \right\}.$$

Условие $1_n \leq v_{j^{gl}}^{\min} + H^{-1}(j^{loc} - 1_n) \leq I$ в определении множества $V_{j^{gl}}^{loc}$ можно переписать в виде $j_1^{loc} = 1, j_1^{gl} - r_2(j_2^{gl} - 1) \leq j_2^{loc} \leq j_1^{gl} - 1 - r_2(j_2^{gl} - 1) + I_2, j_1^{gl} \leq j_p^{loc} \leq I_p + j_1^{gl} - 1, p = 3, 4, \dots, n$. Это позволяет определить множество $V_{j^{gl}}^{loc}$ локальных координат, соответствующих вершинам

$v \in V_{j^{gl}}$, как для полных, так и для неполных тайлов: $V_{j^{gl}}^{loc} = \{j^{loc} \in Z^n \mid j_1^{loc} = 1, \max\{1, j_1^{gl} - r_2(j_2^{gl} - 1)\} \leq j_2^{loc} \leq \min\{r_2, I_2 + j_1^{gl} - 1 - r_2(j_2^{gl} - 1)\}, j_1^{gl} \leq j_p^{loc} \leq I_p + j_1^{gl} - 1, p = 3, 4, \dots, n\}$.

Зависимости между упрощенными тайлами. Информационная зависимость тайлов $j^{gl}, j^{gl} + \varphi^{gl} \in V^{gl}$, $\varphi^{gl} \in Z^n$, определяется наличием точек $v \in V_{j^{gl}}$ и $v + \varphi \in V_{j^{gl} + \varphi^{gl}}$, $\varphi \in \Phi$. Множество векторов $\varphi \in \Phi$, определяющих информационную зависимость тайлов j^{gl} и $j^{gl} + \varphi^{gl}$, обозначим $\Phi_{\varphi^{gl}}^{\varphi}$, а множество глобальных векторов зависимостей тайлов – Φ^{gl} . Пусть $v \in V_{j^{gl}}$ и $v + \varphi \in V_{j^{gl} + \varphi^{gl}}$ – пары информационно зависимых точек с локальными координатами, определяемыми векторами $j^{loc, out} \in V_{j^{gl}}^{loc}, j^{loc, in} \in V_{j^{gl} + \varphi^{gl}}^{loc}$. Множество всех таких пар информационно зависимых точек $j^{loc, out} \in V_{j^{gl}}^{loc}, j^{loc, in} \in V_{j^{gl} + \varphi^{gl}}^{loc}$ при фиксированных векторах $\varphi^{gl} \in \Phi^{gl}$ и $\varphi \in \Phi_{\varphi^{gl}}^{\varphi}$ обозначим $\Lambda_{\varphi^{gl}, \varphi}$, а количество таких пар обозначим $|\Lambda_{\varphi^{gl}, \varphi}|$. Введем еще обозначения $\Lambda_{\varphi^{gl}} = \bigcup_{\varphi \in \Phi_{\varphi^{gl}}^{\varphi}} \Lambda_{\varphi^{gl}, \varphi}$ и $|\Lambda_{\varphi^{gl}}|$, понятные без дополнительных пояснений.

Т е о р е м а. Пусть $\varphi \in \Phi$ – фиксированный вектор зависимостей, H – положительная унитарная матрица, удовлетворяющая условиям

$$|h_m \cdot \varphi| \leq 1, m \in \sigma^{\min}, \quad |h_m \cdot \varphi| \leq 2r_m - 1, m \in \sigma^0, \quad |h_m \cdot \varphi| \leq r_m^{\max} - 1, m \in \sigma^{\max}.$$

Пусть M^{φ} – число индексов $m \in \sigma^0$ таких, что $0 < |h_m \cdot \varphi| \leq r_m - 1$. Тогда вектор φ порождает $2^{M^{\varphi}}$ глобальных векторов зависимостей

$$\varphi^{glk} = (\varphi_1^{glk}, \varphi_2^{glk}, \dots, \varphi_n^{glk}) \in \Phi^{gl}, k = 1, 2, \dots, 2^{M^{\varphi}}.$$

Координаты векторов не превосходят по модулю единицы и определяются следующим образом:

если $m \in \sigma^{\min}$, то $\varphi_m^{glk} = h_m \cdot \varphi$;

если $m \in \sigma^0$, $h_m \cdot \varphi = 0$, либо если $m \in \sigma^{\max}$, $|h_m \cdot \varphi| \leq r_m^{\max} - 1$, то $\varphi_m^{glk} = 0$;

если $m \in \sigma^0$, $r_m \leq |h_m \cdot \varphi| \leq 2r_m - 1$, то $\varphi_m^{glk} = (h_m \cdot \varphi) / |h_m \cdot \varphi|$;

если $m \in \sigma^0$, $0 < |h_m \cdot \varphi| \leq r_m - 1$, то при фиксированных значениях остальных координат, вектор φ порождает два глобальных вектора зависимостей, которые отличаются лишь значениями координаты φ_m^{glk} : для одного глобального вектора зависимостей координата равна нулю, а для другого – $(h_m \cdot \varphi) / |h_m \cdot \varphi|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v \in V_{j^{gl}}$ и $v + \varphi \in V_{j^{gl} + \varphi^{gl}}$ – пары информационно зависимых точек с локальными координатами, определяемыми векторами $j^{loc, out} \in V_{j^{gl}}^{loc}, j^{loc, in} \in V_{j^{gl} + \varphi^{gl}}^{loc}$. Из равенства (2) следует $v = 1_n + H^{-1}(R(j^{gl} - 1_n) + j^{loc, out} - 1_n)$, $v + \varphi = 1_n + H^{-1}(R(j^{gl} - 1_n + \varphi^{gl}) + j^{loc, in} - 1_n)$. Из этих соотношений получим равенство

$$H\varphi = R\varphi^{gl} + j^{loc, in} - j^{loc, out}, \varphi \in \Phi_{\varphi^{gl}}^{\varphi}, j^{loc, out} \in V_j^{loc}, j^{loc, in} \in V_{j + \varphi^{gl}}^{loc}. \quad (3)$$

Из определения локальных координат следуют оценки: $j_m^{loc, in} - j_m^{loc, out} = 0, m \in \sigma^{\min}$; $|j_m^{loc, in} - j_m^{loc, out}| \leq r_m - 1, m \in \sigma^0$; $|j_m^{loc, in} - j_m^{loc, out}| \leq r_m^{\max} - 1, m \in \sigma^{\max}$. Поэтому из равенства (3) сле-

дует $\varphi_m^{gl} = h_m \cdot \varphi$, $m \in \sigma^{\min}$, $\left\lfloor \frac{h_m \cdot \varphi}{r_m} \right\rfloor \leq \varphi_m^{gl} \leq \left\lceil \frac{h_m \cdot \varphi}{r_m} \right\rceil$, $m \in \sigma^0$, $\varphi_m^{gl} = 0$, $m \in \sigma^{\max}$, $\varphi \in \Phi_{\varphi^{gl}}^{\varphi}$, $|h_m \cdot \varphi| \leq r_m^{\max} - 1$, $m \in \sigma^{\max}$. Заметим, что справедливы соотношения

$$\left\lfloor \frac{h_m \cdot \varphi}{r_m} \right\rfloor = \begin{cases} -1, & -r_m + 1 \leq h_m \cdot \varphi \leq -1, \\ 0, & 0 \leq h_m \cdot \varphi \leq r_m - 1, \\ 1, & r_m \leq h_m \cdot \varphi \leq 2r_m - 1, \end{cases} \quad \left\lceil \frac{h_m \cdot \varphi}{r_m} \right\rceil = \begin{cases} -1, & -2r_m + 1 \leq h_m \cdot \varphi \leq -r_m, \\ -r_m + 1 \leq h_m \cdot \varphi \leq 0, \\ 1, & 1 \leq h_m \cdot \varphi \leq r_m - 1, \end{cases}$$

Следовательно, при $m \in \sigma^0$ имеет место: $\varphi_m^{gl} = 0$, если $h_m \cdot \varphi = 0$; $\varphi_m^{gl} = (h_m \cdot \varphi) / |h_m \cdot \varphi|$, если $r_m \leq |h_m \cdot \varphi| \leq 2r_m - 1$; $\varphi_m^{gl} \in \{(h_m \cdot \varphi) / |h_m \cdot \varphi|, 0\}$, если $0 < |h_m \cdot \varphi| \leq r_m - 1$.

С л е д с т в и е. Каждый глобальный вектор зависимостей $\varphi^{gl} \in \Phi^{gl}$ порождается векторами из множества

$$\Phi_{\varphi^{gl}}^{\varphi} = \left\{ \varphi \in \Phi \mid h_m \cdot \varphi = \varphi_m^{gl}, m \in \sigma^{\min} \right\} \cap \left\{ \varphi \in \Phi \mid \left\lfloor \frac{h_m \cdot \varphi}{r_m} \right\rfloor \leq \varphi_m^{gl} \leq \left\lceil \frac{h_m \cdot \varphi}{r_m} \right\rceil, m \in \sigma^0 \right\} \cap \left\{ \varphi \in \Phi \mid |h_m \cdot \varphi| \leq r_m^{\max} - 1, m \in \sigma^{\max} \right\}.$$

З а м е ч а н и е 2. Среди порождаемых вектором φ глобальных векторов зависимостей может быть нулевой вектор. Это означает наличие зависимостей между операциями, приписанными одному тайлу.

П р и м е р (продолжение). Применим теорему для получения глобальных векторов зависимостей. Напомним, $\Phi = \{e_1, e_2, \dots, e_n, e_1 - e_2, e_1 - e_3, \dots, e_1 - e_n\}$, $h_1 = e_1$, $h_m = e_1 + e_m$, $m = 2, 3, \dots, n$, $\sigma^{\min} = \{1\}$, $\sigma^0 = \{2\}$, $\sigma^{\max} = \{3, 4, \dots, n\}$. Так как $0 \leq h_m \cdot \varphi \leq 1$, $m = 1, 2, \dots, n$, $\varphi \in \Phi$, то условия теоремы выполняются.

Пусть $m = 1$, т. е. $m \in \sigma^{\min}$. Первая координата глобального вектора, порождаемого вектором φ , равна $h_m \cdot \varphi = e_1 \cdot \varphi$. Поэтому для $\varphi = e_1$, $\varphi = e_1 - e_k$, $k = 2, 3, \dots, n$, первая координата равна 1, а для $\varphi = e_k$, $k = 2, 3, \dots, n$, первая координата нулевая.

Пусть $m = 2$, т. е. $m \in \sigma^0$. В этом случае $(e_1 + e_2) \cdot \varphi = 0$ (т. е. $h_m \cdot \varphi = 0$) для $\varphi = e_k$, $k = 3, 4, \dots, n$, $\varphi = e_1 + e_2$, поэтому вторая координата глобальных векторов, порождаемых этими векторами зависимостей, равна 0. Для $\varphi = e_1$, $\varphi = e_2$, $\varphi = e_1 - e_k$, $k = 3, 4, \dots, n$, выполняется $(e_1 + e_2) \cdot \varphi = 1$, поэтому каждый из этих векторов φ порождает два глобальных вектора зависимостей: вторая координата, при фиксированном значении остальных координат, для одного глобального вектора зависимостей равна 0, а для другого равна 1.

Пусть $m = 3, 4, \dots, n$, т. е. $m \in \sigma^{\max}$. Координаты (глобальных векторов) с такими номерами m всегда нулевые.

Таким образом, без учета нулевых векторов, имеем:

$$\begin{aligned} \Phi^{gl} &= \{e_1, e_2, e_1 + e_2\}. \\ \Phi_{e_1}^{\varphi} &= \{\varphi_1; \varphi_m^-, m = 2, 3, \dots, n\}, \quad \Phi_{e_2}^{\varphi} = \{\varphi_2\}, \quad \Phi_{e_1+e_2}^{\varphi} = \{\varphi_1; \varphi_m^-, m = 3, 4, \dots, n\}, \\ |\Lambda_{e_2}| &= |\Lambda_{e_2, \varphi_2}| = \prod_{p=3}^n r_p^{\max}, \quad |\Lambda_{e_1+e_2, \varphi_1}| = \prod_{p=3}^n (r_p^{\max} - 1), \quad |\Lambda_{e_1+e_2, \varphi_m^-}| = r_m^{\max} \prod_{m \neq p=3}^n (r_p^{\max} - 1), \\ |\Lambda_{e_1+e_2}| &= \left(1 + \sum_{m=3}^n \frac{1}{r_m^{\max} - 1} \right) \prod_{p=3}^n (r_p^{\max} - 1). \end{aligned}$$

О выборе свободных параметров, определяющих размер тайлов. Тайл рассматривается как зерно вычислений. Множество операций, соответствующих точкам $v \in V$, принадлежащих одному тайлу, отображается на один и тот же вычислительный узел суперкомпьютера. Способ разбиения на тайлы (их форма, размеры) влияют на эффективность реализации алгоритма. В работах [4, 6–8] разработан метод оптимизации тайлинга в рамках отображения n -мерных

алгоритмов с однородными зависимостями на параллельные системы с распределенной памятью. В качестве критерия оптимальности тайлинга выбрано время реализации алгоритма.

Применим подобную технику к рассматриваемому в работе примеру. Используем LPGS-стратегию [9] пространственно-временного отображения полученного крупнозернистого алгоритма (множество операций одного тайла принимается в качестве одной макрооперации) на кольцо процессоров, состоящее из заданного числа Δ процессоров. Оценим время решения задачи сверху функцией, зависящей явным образом от параметра r_2 . Минимизация этой функции позволяет получить алгоритм с наилучшим временем реализации на заданном кольце процессоров. В качестве оператора π , отображающего пространство Z^n в пространство Z^1 , выберем оператор проецирования на ось $O_{e_2}: (j_1^{gl}, j_2^{gl}, \dots, j_n^{gl}) \xrightarrow{\pi} (j_2^{gl})$.

Согласно LPGS-стратегии функцию распределения тайлов между Δ процессорами определим следующим образом: $f(j^{gl}) = (j_1^{gl} - 1) \bmod \Delta + 1$, $j^{gl} \in \tilde{U}_{n,n-1}$. Чтобы избежать громоздких выражений, далее будем считать $I_1 + I_2 - 1$ кратным r_2 , $Q_2 = \frac{I_1 + I_2 - 1}{r_2}$ кратно Δ . Тогда, определив целое число $\Gamma = \frac{I_1 + I_2 - 1}{r_2 \Delta}$, разобьем множество $\tilde{U}_{n,n-1}$ на подмножества (блоки), которые получаются сечением множества $\tilde{U}_{n,n-1}$ гиперплоскостями

$$j_2^{gl} = (\gamma - 1)\Delta + \delta, \quad 1 \leq \gamma \leq \Gamma, \quad 1 \leq \delta \leq \Delta: \tilde{U}_{n,n-1}^{\gamma;\delta} = \left\{ (j_1^{gl}, j_2^{gl}, 1, \dots, 1) \in Z^n \mid j_2^{gl} = (\gamma - 1)\Delta + \delta, \right. \\ \left. r_2((\gamma - 1)\Delta + \delta) - r_2 - I_2 + 2 \leq j_1^{gl} \leq r_2((\gamma - 1)\Delta + \delta) \right\}, \quad 1 \leq \gamma \leq \Gamma, \quad 1 \leq \delta \leq \Delta.$$

Информационная зависимость между соседними тайлами, принадлежащими одному блоку, определяется вектором e_1 , а между соседними блоками $\tilde{U}_{n,n-1}^{\gamma;\delta}$, $\tilde{U}_{n,n-1}^{\gamma;\delta+1}$ – векторами e_2 , $e_1 + e_2$. Операции всех тайлов, принадлежащих множеству $\bigcup_{\gamma=1}^{\Gamma} \tilde{U}_{n,n-1}^{\gamma;\delta}$, выполняются на процессоре с номером δ последовательно: первыми выполняются тайлы из множества $\tilde{U}_{n,n-1}^{1;\delta}$, затем $\tilde{U}_{n,n-1}^{2;\delta}$ и т. д. Начало выполнения операций, приписанных тайлу j^{gl} , определим с помощью глобальной таймирующей функции

$$t(j^{gl}) = \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} (c_\gamma + \tau \cdot j^{gl}) 1_{\tilde{U}_{n,n-1}^{\gamma}}(j^{gl}), \quad j^{gl} \in \tilde{U}_{n,n-1}, \quad \tilde{U}_{n,n-1}^{\gamma} = \bigcup_{\delta=1}^{\Delta} \tilde{U}_{n,n-1}^{\gamma;\delta}, \quad \tau \in Z^n, \quad c_\gamma \in Z^1,$$

где $1_{\tilde{U}_{n,n-1}^{\gamma}}(j^{gl})$ – функция, принимающая значение 1, если $j^{gl} \in \tilde{U}_{n,n-1}^{\gamma}$, и значение 0 в противном случае.

Координаты вектора $\tau = (\tau_1, \tau_2, 0, \dots, 0)$ определим как $\tau_1 = \max(T_{\text{comp}}, T_{\text{comm}})$, $\tau_2 = T_{\text{comp}} + T_{\text{comm}}$, где $T_{\text{comp}} = t_0 |R| = t_0 r_2 \prod_{k=3}^n r_k^{\max}$ – время, необходимое для выполнения всех операций, приписанных одному полному тайлу $j^{gl} \in \tilde{U}_{n,n-1}^{\gamma;\delta}$ (t_0 – время выполнения одной операции, соответствующей точке $v \in V_{j^{gl}}$), $T_{\text{comm}} = a + b \max(|\Lambda_{e_2}|, |\Lambda_{e_1+e_2}|) = a + b |\Lambda_{e_2}| = a + b \prod_{k=3}^n r_k^{\max}$ – время, необходимое для передачи результатов выполнения операций тайла $j^{gl} \in \tilde{U}_{n,n-1}^{\gamma;\delta}$ вычислительному узлу с номером $\delta+1$ (a – время инициализации канала связи, b – время, необходимое для непосредственной передачи единицы данных). Такое определение вектора τ позволяет совмещать процесс передачи результатов выполнения операций, соответствующих тайлу $j^{gl} \in \tilde{U}_{n,n-1}^{\gamma;\delta}$, вычислительным узлом δ соседним информационно зависимым тайлам $j^{gl} + e_2$, $j^{gl} + e_1 + e_2 \in \tilde{U}_{n,n-1}^{\gamma;\delta+1}$, операции которых выполняются вычислительным узлом $\delta+1$, с процессом выполнения вычислительным узлом δ операций, принадлежащих другим тайлам $j^{gl} + e_1 \in \tilde{U}_{n,n-1}^{\gamma;\delta}$.

Выбор параметров $c_\gamma = -(\tau_1 + \tau_2) + (\gamma - 1) \max\{0, -\tau_2\Delta + \tau_1(I_2 + r_2 - 1) + \tau_1 r_2 \Delta\}$, $\gamma = 1, 2, \dots, \Gamma$, исходя из условия $c_{\gamma+1} - c_\gamma \geq \max\{0, -\tau_2\Delta + \tau_1(I_2 + r_2 - 1) + \tau_1 r_2 \Delta\}$ позволяет обеспечить выполнение следующих ограничений:

$$\begin{aligned} t(j^{sl} + e_2) - t(j^{sl}) &\geq \tau_2, \quad t(j^{sl} + e_1 + e_2) - t(j^{sl}) \geq \tau_2, \quad j^{sl} \in \tilde{U}_{n,n-1}^{\gamma;\Delta}, \quad j^{sl} + e_2, \quad j^{sl} + e_1 + e_2 \in \tilde{U}_{n,n-1}^{\gamma+1;1}, \\ t(j'') - t(j') &\geq \tau_1, \quad j'' \in \tilde{U}_{n,n-1}^{\gamma+1;\delta}, \quad j' \in \tilde{U}_{n,n-1}^{\gamma;\delta}, \quad \delta = 1, 2, \dots, \Delta, \quad \gamma = 1, 2, \dots, \Gamma - 1, \\ t(j^{\min}) &= 0, \quad j^{\min} = (1, 1, \dots, 1). \end{aligned}$$

Первое ограничение связано с информационной зависимостью между тайлами, принадлежащими соседним блокам $\tilde{U}_{n,n-1}^{\gamma;\Delta}$, $\tilde{U}_{n,n-1}^{\gamma+1;1}$, операции которых выполняются граничными процессорными элементами с номерами Δ и 1 . Второе ограничение связано с установленным порядком выполнения тайлов на одном процессоре δ : тайлы множества $\tilde{U}_{n,n-1}^{\gamma+1;\delta}$ выполняются только после выполнения тайлов множества $\tilde{U}_{n,n-1}^{\gamma;\delta}$.

Максимальное значение таймирующей функции в области $\tilde{U}_{n,n-1}$ ограничено ее значением в точке $j^{\max} = (I_1, r_2^{\max}/r_2, 1, \dots, 1)$:

$$t(j^{\max}) = (\Gamma - 1) \max\{0, -\tau_2\Delta + \tau_1(I_2 + r_2 - 1) - \tau_1 r_2 \Delta\} + \tau_1(I_1 - 1) + \tau_2 r_2^{\max}/r_2.$$

Величина $t(j^{\max}) + \tau_2$ определяет время реализации алгоритма. Явная зависимость $\Gamma = (I_1 + I_2 - 1)/r_2\Delta$, $\tau_1 = \max\left(t_0 r_2 \prod_{k=3}^n r_k^{\max}, T_{comm}\right)$, $\tau_2 = t_0 r_2 \prod_{k=3}^n r_k^{\max} + T_{comm}$ от параметра r_2 , определяющего размер тайла, позволяет осуществлять априорную оптимизацию тайлинга.

Литература

1. Boulet P., Darte A., Risset T., Robert Y. // Integration, The VLSI J. 1994. Vol. 17. P. 33–51.
2. Xue J. // J. of Parallel and Distributed Computing. 1997. Vol. 1, N 42. P. 42–59.
3. Hodzic E., Shang W. // IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems. 1998. Vol. 9, N 5. P. 417–428.
4. Баханович С. В., Соболевский П. И. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2006. № 2. С. 106–112.
5. Соболевский П. И., Баханович С. В., Горбач А. Н. // Кибернетика и системный анализ. 2010. Т. 46, № 1. С. 163–171.
6. Соболевский П. И., Баханович С. В. // Труды Института математики НАН Беларуси. 2009. Т. 17, № 2. С. 84–93.
7. Баханович С. В., Соболевский П. И. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2007. № 3. С. 113–118.
8. Баханович С. В., Соболевский П. И. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2008. № 3. С. 112–119.
9. Баханович С. В., Лиходед Н. А. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2003. № 1. С. 101–108.

N. A. LIKHODED, P. I. SOBOLEVSKY

HOMOGENEOUS DEPENDENCES IN ALGORITHMS GENERATED BY TILES

Summary

Tiling for algorithms with homogeneous dependences is considered. Global dependences between tiles are stated explicitly. Minimization of runtime for rings of processors is shown.

УДК 519.1

В. Г. НАЙДЕНКО

О СЛОЖНОСТИ НАХОЖДЕНИЯ ВТОРОГО РЕШЕНИЯ NP -ПОЛНОЙ ЗАДАЧИ

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 04.11.2011)

Проблема поиска эффективных алгоритмов для решения NP -полных задач занимает одно из важнейших мест в современной прикладной математике [1]. Известно, что для некоторых NP -полных задач, например, задачи нахождения гамильтонова цикла в кубическом графе, характерно следующее свойство: каждый индивидуальный пример такой задачи либо не имеет решения, либо имеет по крайней мере два решения. Возникает естественный вопрос, если имеется в наличии одно решение, можно ли найти за полиномиальное время другое решение, зная о его существовании? Например, для второго гамильтонова цикла в кубическом графе в настоящее время известны только экспоненциальные по времени алгоритмы его нахождения [2].

В работе [3] мы построили такую NP -полную задачу с указанным выше свойством, что если $NP \cap co-NP \neq P$, то не существует полиномиального алгоритма нахождения второго решения. В то же время оставался открытый вопрос о существовании полиномиального алгоритма в случае, когда $NP \cap co-NP = P$ и $NP \neq P$. В настоящей статье мы приведем указанное решение. Условие $NP \cap co-NP = P$ означает существование полиномиальных алгоритмов для решения задач класса $NP \cap co-NP$ в распознавательной формулировке. То есть, от алгоритма требуется только показать наличие или отсутствие решения рассматриваемой задачи (ответить ДА или НЕТ). Предположим, что также имеются полиномиальные алгоритмы для всех задач из класса $NP \cap co-NP$, которые не только доказывают существование или отсутствие решения задачи, но и находят по крайней мере одно, если оно имеется. Теперь мы покажем, как при таких условиях за полиномиальное время можно найти второе решение у данных NP -полных задач.

Пусть Σ – конечный алфавит. Как обычно, через Σ^* обозначим множество всех слов (или цепочек). Пусть $L \subset \Sigma^*$ – произвольный NP -полный язык, каждый индивидуальный пример которого либо не имеет решений, либо имеет по крайней мере два решения. Язык L допускает следующее определение: $x \in L \Leftrightarrow \exists w P^L(x, w)$, где P^L – двухместный предикат на $\Sigma^* \times \Sigma^*$, связанный с L . Такой предикат называется удостоверяющим для языка L . Значение $x \in \Sigma^*$ можно интерпретировать как индивидуальный пример массовой задачи из NP , определенной на языке L , а $w \in \Sigma^*$ – его решение. Так как $L \in NP$, то предикат $P^L(x, w)$ полиномиально вычислим и длина $|w|$ полиномиально ограничена длиной $|x|$ (см. [4]). Кроме того, если для конкретного примера x существует некоторое решение w , то также найдется и второе решение $w' \neq w$.

Построим новый язык $L_{\#}$ над алфавитом $\Sigma_{\#} = \Sigma \cup \{\#\}$, где $\#$ – новый символ, не принадлежащий Σ . Язык L определяется таким образом: $x \in L_{\#} \Leftrightarrow \exists w P^{L_{\#}}(x, w)$, где $P^{L_{\#}}$ – удостоверяющий двухместный предикат на $\Sigma_{\#}^* \times \Sigma_{\#}^*$ связан с языком $L_{\#}$ и задан следующим алгоритмом.

► Алгоритм вычисления $P^{L\#}(x, w)$.

Шаг 1. Если x не содержит в точности один символ $\#$, то алгоритм прекращает работу и возвращает $P^{L\#}(x, w) = 0$. Иначе x имеет вид $x'\#w'$, где $x', w' \in \Sigma^*$ (цепочки x' и/или w' могут быть пустые).

Шаг 2. Если w содержит хотя бы один символ $\#$, то алгоритм прекращает работу и возвращает $P^{L\#}(x, w) = 0$.

Шаг 3. Если $P^L(x', w') = 0$, то алгоритм прекращает работу и возвращает $P^{L\#}(x, w) = 0$.

Шаг 4. Если $P^L(x', w') = 1$ и $P^L(x', w) = 1$, где $w \neq w'$, то алгоритм прекращает работу и возвращает $P^{L\#}(x, w) = 1$.

Шаг 5. Алгоритм прекращает работу и возвращает $P^{L\#}(x, w) = 0$.

Нетрудно видеть, $P^{L\#}$ является полиномиально вычислимым предикатом, что прямо следует из полиномиальной вычислимости предиката P^L . Значит, язык $L_{\#}$ принадлежит классу NP . Более того, если $P^{L\#}(x, w) = 1$, то, как следует из шага 4, цепочка w будет являться вторым решением (наряду с w') индивидуального примера x' NP -полной задачи L . Следовательно, язык $L_{\#}$ можно использовать для нахождения вторых решений задачи L .

Построим теперь новый язык $L'_{\#}$ над алфавитом $\Sigma_{\#}$ следующим образом: $x \in L'_{\#} \Leftrightarrow \exists w P^{L\#}(x, w)$, где $P^{L\#}$ – удостоверяющий двухместный предикат на $\Sigma_{\#}^* \times \Sigma_{\#}^*$ связан с языком $L'_{\#}$ и задан следующим алгоритмом.

► Алгоритм вычисления $P^{L'_{\#}}(x, w)$.

Шаг 1. Если x содержит в точности один символ $\#$, то перейдем к шагу 2. Иначе алгоритм прекращает работу и возвращает $P^{L'_{\#}}(x, w) = 1$.

Шаг 2. Представим x в виде $x'\#w'$, где $x', w' \in \Sigma^*$ (цепочки x' и/или w' могут быть пустые). Если $P^L(x', w') = 0$, то алгоритм прекращает работу и возвращает $P^{L'_{\#}}(x, w) = 1$.

Шаг 3. Алгоритм прекращает работу и возвращает $P^{L'_{\#}}(x, w) = 0$.

Отметим, что каждый индивидуальный пример x задачи $L'_{\#}$ либо не имеет решения, либо всякая цепочка w будет решением для x . Язык $L'_{\#}$, задаваемый удостоверяющим предикатом $P^{L'_{\#}}$, также будет принадлежать классу NP в силу полиномиальной вычислимости предиката P^L . Справедлива следующая лемма.

Л е м м а. Язык $L'_{\#}$ является дополнением языка $L_{\#}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала покажем, что если $x \in L_{\#}$, то $x \notin L'_{\#}$. Нетрудно видеть, что $x \in L_{\#}$ при следующих необходимых условиях: $P^L(x', w') = 1$ и $x = x'\#w'$. Эти же условия будут достаточными, поскольку w' является решением индивидуального примера x' задачи L , и в силу определения языка L всегда найдется второе решение $w \neq w'$ такое, что $P^L(x', w) = 1$. Тогда очевидно, что на шаге 4 алгоритм вычисления $P^{L\#}(x, w)$ для этих входных данных x и w выдаст $P^{L\#}(x, w) = 1$, т. е. удостоверит $x \in L_{\#}$. Но при условиях $P^L(x', w') = 1$ и $x = x'\#w'$, алгоритм вычисления $P^{L'_{\#}}(x, w)$ пройдет все шаги и выдаст $P^{L'_{\#}}(x, w) = 0$ независимо от входной цепочки w . Следовательно, в таком случае $x \notin L'_{\#}$.

Осталось показать, что если $x \notin L_{\#}$, то $x \in L'_{\#}$. Заметим, что $x \notin L_{\#}$ когда x не содержит в точности один символ $\#$, т. е. когда x нельзя представить в виде $x' \# w'$. В этом случае алгоритм вычисления $P^{L'_{\#}}(x, w)$ выдаст $P^{L'_{\#}}(x, w) = 1$ уже на шаге 1 независимо от входной цепочки w , т. е. удостоверит, что $x \in L'_{\#}$. Рассмотрим оставшийся случай, когда $x \notin L_{\#}$ при $P^L(x', w') = 0$ и $x = x' \# w'$. В этом случае алгоритм вычисления $P^{L'_{\#}}(x, w)$ выдаст $P^{L'_{\#}}(x, w) = 1$ на шаге 2 независимо от входной цепочки w , т. е. также удостоверит, что $x \in L'_{\#}$.

Итак, мы показали, что $x \in L_{\#}$ тогда и только тогда, когда $x \notin L'_{\#}$. Лемма доказана.

С л е д с т в и е. Язык $L_{\#}$ принадлежит классу $NP \cap co - NP$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из того, что и язык $L_{\#}$ и его дополнение $L'_{\#}$ принадлежат классу NP .

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а. Допустим, что для всякой задачи из класса $NP \cap co - NP$ найдется соответствующий полиномиальный алгоритм нахождения или доказательства отсутствия решений ее индивидуальных примеров. Тогда можно построить полиномиальный алгоритм нахождения второго решения NP -полной задачи, связанной с языком L , при условии наличия первого решения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $L_{\#} \in NP \cap co - NP$ согласно следствию из леммы, то существует некоторый полиномиальный алгоритм A , который для каждого индивидуального примера x задачи $L_{\#}$ находит решение w (если оно существует). Тогда определим алгоритм A' , находящий второе решение NP -полной задачи следующим образом.

► Алгоритм A' для задачи L .

Вход: индивидуальный пример x и его решение w .

Шаг 1. Формируем цепочку $x' = x \# w$ и запускаем на входе x' алгоритм A .

Шаг 2. Дожидаемся, когда A в конце своей работы выдаст ответ w' . Тогда сам алгоритм A' выдает тот же ответ w' и останавливается.

Очевидно, что алгоритм A' работает полиномиальное время, поскольку время его работы полностью совпадает со временем работы полиномиального алгоритма A . Корректность работы алгоритма A' вытекает из того, что если входная цепочка w является решением для индивидуального примера x задачи L , то найденная алгоритмом A цепочка w' одновременно является решением как для индивидуального примера x' задачи $L_{\#}$, так и для индивидуального примера x задачи L , причем $w' \neq w$.

Таким образом, мы доказали существование полиномиального алгоритма для нахождения вторых решений для задачи L . Точнее мы показали, что если существует алгоритм A , то на его основе можно построить требуемый алгоритм A' . Возникает вопрос, как найти этот алгоритм A , зная о его существовании? С помощью техники диагонализации мы конструктивно представим полиномиальный алгоритм A'' для нахождения вторых решений для задачи L , который будет неявно эксплуатировать алгоритм A . Пусть мы имеем конструктивное (с помощью гёделевской нумерации) перечисление всех машин Тьюринга T_1, T_2, \dots . Ответом машины Тьюринга будем считать слово, записанное на ее ленте после окончания ее работы.

► Алгоритм A'' для задачи L .

Вход: индивидуальный пример x и его решение w .

Шаг 1. Формируем цепочку $x' = x \# w$.

Шаг 2. Устанавливаем значения целочисленных переменных i и j в единицу, т. е. $i = 1$ и $j = 1$.

Шаг 3. Запускаем на входе x' машину Тьюринга T_j с гёделевым номером j и наблюдаем за ней в течение $i \cdot (|x| + |w| + 1)^i$ тактов. Если T_j не остановилась в течение этого времени или остановилась, но не выдала ответ w' в алфавите Σ , то прерываем работу машины Тьюринга T_j и переходим к шагу 5.

Шаг 4. Если $P^L(x, w') = 1$ и $w' \neq w$, то данный алгоритм A'' выдает w' в качестве второго решения индивидуального примера x задачи L и останавливается.

Шаг 5. Если $i > j$, то $j = j + 1$. Иначе $i = i + 1$ и $j = 1$.

Шаг 6. Переход к шагу 3.

Покажем, что алгоритм A'' работает корректно. Заметим, что итерацию алгоритма A'' составляют шаги 3–6. Допустим, что алгоритм A реализуется машиной Тьюринга $T_{j'}$ с некоторым гёделевым номером j' . Пусть ее вычислительная сложность не превосходит некоторый полином $c \cdot n^d$, где c и d – какие-то константы и $n = |x| + |w| + 1$ – длина входа машины $T_{j'}$. Обратив внимание на шаги 2 и 5, заметим, что алгоритм A'' последовательно пробегает все пары натуральных чисел (i, j) такие, что $i \geq j$. Возьмем $i' = \max\{c, d, j'\}$. В этом случае мы имеем $i' \geq j'$. Тогда по крайней мере на k -й итерации алгоритма, где $k = j' + \frac{i'(i'-1)}{2}$, алгоритм A'' остановится и выдаст ответ w' . Действительно, в этом случае $i' \cdot (|x| + |w| + 1)^{i'} \geq c \cdot (|x| + |w| + 1)^d$ для любых слов x и w , поэтому машина Тьюринга $T_{j'}$ доработает до конца без прерывания. А поскольку машина Тьюринга $T_{j'}$ реализует алгоритм A , то на шаге 3 в итерации k будет действительно найдено второе решение для индивидуального примера x задачи L .

Теперь оценим вычислительную сложность алгоритма A'' . Заметим, что рассмотренное выше значение j' , соответствующее машине $T_{j'}$, реализующей алгоритм A , не зависит от входных цепочек x и w , поскольку для различных цепочек x и w , одна и та же машина Тьюринга $T_{j'}$ будет выдавать правильный ответ w' . Поэтому j' можно считать константой. Так как $i' = \max\{c, d, j'\}$, где c и d – константы, то i' – также константа. Алгоритм A'' проработает не более $k = j' + \frac{i'(i'-1)}{2}$ итераций, т. е. максимальное число k итераций алгоритма – тоже константа. Конечно, алгоритм A'' может завершить работу и раньше, случайно найдя решение w' , но число итераций алгоритма A'' не может превысить k . Теперь оценим вычислительную сложность каждой итерации. Отметим, что вычислительная сложность итерации состоит из суммарной вычислительной сложности шагов 3 и 4. Заметим, что сложность шага 3 целиком определяется переменной i . Поскольку вплоть до итерации k величина i на всех предыдущих итерациях не превосходит i' , то сложность шага 3 на каждой итерации не превышает $i' \cdot (|x| + |w| + 1)^{i'}$. Сложность шага 4 определяется вычислительной сложностью предиката $P^L(x, w')$. Пусть она составляет $a \cdot (|x| + |w| + 1)^b$, где a и b некоторые константы. Так как длина $|w'|$ не может превышать $i' \cdot (|x| + |w| + 1)^{i'}$, а $i' \cdot (|x| + |w| + 1)^{i'}$ превосходит $|x|$, то максимальная вычислительная сложность шага 4 не может превзойти $a(2i')^b \cdot (|x| + |w| + 1)^{bi'}$.

Итак, общую вычислительную сложность алгоритма A'' можно оценить сверху как $k \cdot (i' \cdot (|x| + |w| + 1)^{i'} + a(2i')^b \cdot (|x| + |w| + 1)^{bi'})$. Так как $a(2i')^b \cdot (|x| + |w| + 1)^{bi'}$ больше, чем $i' \cdot (|x| + |w| + 1)^{i'}$, то итоговая вычислительная сложность алгоритма A'' ограничена сверху полиномом $C \cdot n^D$, где $n = |x| + |w| + 1$ – длина входа алгоритма A'' , а величины $C = 2ka(2i')^b$

и $D = bi'$ представляют собой константы, поскольку a, b, i', k являются константами. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Института математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция».

Литература

1. Найдено В. Г. // Докл. РАН. 1996. Т. 348, № 6. С. 731–732.
2. Krawczyk A. // J. Comput. System Sci. 1999. Vol. 58, N 3. P. 641–647.
3. Найдено В. Г. // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2002. № 2. С. 112–113.
4. Goldrich O., Micali S., Wigderson A. // J. ACM. 1991. Vol. 38, N 3. P. 691–729.

V. G. NAIDENKO

COMPLEXITY OF FINDING A SECOND SOLUTION TO A *NP*-COMPLETE PROBLEM

Summary

For any *NP*-complete problem, each example of which contains neither solution nor at least two solutions, we constructed a polynomial-time algorithm that for a given example of the problem and its solution finds a second solution, provided that $NP \cap co-NP = P$ and $NP \neq P$.

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

УДК 535. 3.530.1.

А. М. ГОНЧАРЕНКО

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ
В КРУГЛОМ СЕЛФОКЕ**

Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 30.12.2011)

Обычно при анализе свойств неоднородных световодов типа селфоков рассматриваются особенности распространения в них гауссовых одномерных или круговых пучков [1–3]. Но в круговых неоднородных волноводах возможно распространение и световых пучков с эллиптическим поперечным сечением, которые могут возбуждаться соответствующими эллиптическими лучами. В данной статье рассмотрены особенности свойств таких пучков.

Волновое уравнение записываем в виде

$$\Delta\varphi + [k_0^2 - \alpha_1(x^2 + y^2)]\varphi = 0. \quad (1)$$

Для узких световых пучков $\varphi = \psi(x, y, z)e^{-ik_0z}$ получаем следующее параболическое уравнение:

$$\frac{\partial^2\psi}{2k_0\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{2k_0\partial y^2} - i\frac{\partial\psi}{\partial z} - \alpha_1(x^2 + y^2)\psi = 0. \quad (2)$$

В системе $x' = x\sqrt{2k_0}$, $y' = y\sqrt{2k_0}$ имеем (штрихи далее опускаем)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2} - i\frac{\partial\psi}{\partial z} - \alpha(x^2 + y^2)\psi = 0. \quad (3)$$

Здесь $\alpha = \alpha_1/2k_0$. Будем искать решение уравнения (3) в виде следующего эллиптического гауссова пучка

$$\psi = A_0 \exp\left(i\gamma_1 - \gamma_2 - \frac{x^2}{fx_0^2} + i\frac{x^2}{gx_0^2} - \frac{y^2}{hy_0^2} + i\frac{y^2}{ly_0^2}\right). \quad (4)$$

Подставляя (4) в уравнение (3), получаем следующую систему:

$$\frac{2}{fx_0^2} + \frac{2}{hy_0^2} - \gamma'_1 = 0, \quad (5)$$

$$\frac{2}{gx_0^2} + \frac{2}{ly_0^2} + \gamma'_2 = 0; \quad (6)$$

$$\frac{f'}{f} + \frac{8}{gx_0^2} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{4}{f^2x_0^2} - \frac{4}{g^2x_0^2} - \frac{g'}{g^2} - \alpha x_0^2 = 0; \quad (8)$$

$$\frac{h'}{h} + \frac{8}{ly_0^2} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{4}{h^2 y_0^2} - \frac{4}{l^2 y_0^2} - \frac{l'}{l^2} - \alpha y_0^2 = 0. \quad (10)$$

Здесь штрих означает производную по z .

Из уравнений (7),(8) и (9),(10) соответственно получаем уравнения

$$2f''f = (f')^2 - \delta^2 f^2 + \delta_x^2, \quad (11)$$

$$2h''h = (h')^2 - \delta^2 h^2 + \delta_y^2, \quad (12)$$

где $\delta^2 = 16\alpha$, $\delta_x^2 = \frac{64}{x_0^4}$, $\delta_y^2 = \frac{64}{y_0^4}$.

Решения уравнений (11) и (12) представляем в виде

$$f = a - b \cos 4\sqrt{\alpha}z, \quad (13)$$

$$h = A - B \cos 4\sqrt{\alpha}z. \quad (14)$$

При этом $a, b = \frac{2}{\alpha x_0^4 f_0} \pm \frac{1}{2} f_0$, $A, B = \frac{2}{\alpha y_0^4 h_0} \pm \frac{1}{2} h_0$.

Из уравнений (7)–(10) находим

$$g = -\frac{2}{x_0^2} \frac{a - b \cos 4\sqrt{\alpha}z}{\sqrt{\alpha} b \sin 4\sqrt{\alpha}z}, \quad (15)$$

$$l = -\frac{2}{y_0^2} \frac{A - B \cos 4\sqrt{\alpha}z}{\sqrt{\alpha} B \sin 4\sqrt{\alpha}z}. \quad (16)$$

Из уравнения (5) имеем

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{x_0^2 \sqrt{\alpha} f_0} \operatorname{tg} 2\sqrt{\alpha}z \right) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{y_0^2 \sqrt{\alpha} h_0} \operatorname{tg} 2\sqrt{\alpha}z \right). \quad (17)$$

Решение уравнения (6) можно представить в виде

$$\gamma_2 = \frac{1}{4} \ln \left[(a + b \cos 4\sqrt{\alpha}z)(A + B \cos 4\sqrt{\alpha}z) \right] \quad (18)$$

или

$$\exp(-\gamma_2) = \left[(a + b \cos 4\sqrt{\alpha}z)(A + B \cos 4\sqrt{\alpha}z) \right]^{-1/4}. \quad (19)$$

В результате электрическое поле эллиптического светового пучка в неоднородном волноводе может быть представлено следующим образом:

$$E = A_0 \left[(a + b \cos 4\sqrt{\alpha}z)(A + B \cos 4\sqrt{\alpha}z) \right]^{-1/4} \exp \left[-ik_0 z + \frac{i}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{x_0^2 \sqrt{\alpha} f_0} \operatorname{tg} 2\sqrt{\alpha}z \right) + \frac{i}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{y_0^2 \sqrt{\alpha} h_0} \operatorname{tg} 2\sqrt{\alpha}z \right) - \frac{x^2}{fx_0^2} - \frac{y^2}{hy_0^2} + \frac{ix^2}{gx_0^2} + \frac{iy^2}{ly_0^2} \right]. \quad (20)$$

Это осциллирующий эллиптический волновой пакет. Фазовая поверхность его является достаточно сложной и изменяется с расстоянием от выпуклой до вогнутой и наоборот. Пространственная форма пучка определяется уравнением

$$\frac{x^2}{f(z)x_0^2} + \frac{y^2}{h(z)y_0^2} = \text{const}. \quad (21)$$

Это пульсирующий эллиптический пучок, имеющий одинаковый период в обоих плоскостях. Максимальные и минимальные поперечные размеры его определяются экстремумами

функций $f(z), h(z)$ и имеют место при $z = \frac{N\pi}{4\sqrt{\alpha}}$, $N = 0, 1, 2, \dots$. При этом фазовая поверхность светового поля обращается в плоскость [1].

Литература

1. Гончаренко А. М. Гауссовы пучки света. М., 2005.
2. Шевченко В. В. Плавные переходы в открытых волноводах. М., 1969
3. Микаэлян А. Л. // Квантовая электроника. 1977. № 2. С. 467.

A. M. GONCHARENKO

PROPAGATION OF ELLIPTICAL LIGHT BEAMS IN A ROUND SELFOC

Summary

Some properties of optical elliptical beams are considered.

Национальная академия наук Беларуси

УДК 517.977

В. И. БАХТИН

ЗАМЕЧАНИЯ ПО ПОВОДУ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ А. В. АРУТЮНОВА
ОБ УСЛОВНОМ ЭКСТРЕМУМЕ

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 15.06.2011)

Рассмотрим задачу на условный экстремум

$$\begin{cases} f(x) \rightarrow \min, & x \in \mathbb{R}^n, \\ g_i(x) \leq 0, & 1 \leq i \leq s, \\ g_i(x) = 0, & s < i \leq m, \end{cases} \quad f, g_i \in C^1(\mathbb{R}^n). \quad (1)$$

Определим для нее функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x),$$

где $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$. Известное необходимое условие первого порядка для решения задачи (1) называется принципом Лагранжа и формулируется так.

Т е о р е м а 1. Если точка $a \in \mathbb{R}^n$ является решением задачи (1), то существует такой вектор параметров $\lambda \neq 0$, что

$$L'_x(a, \lambda) = 0, \quad (2)$$

$$\lambda_i g'_i(a) = 0, \quad i = 1, \dots, s, \quad (3)$$

$$\lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, s. \quad (4)$$

В этой теореме равенства (3) называются условиями дополняющей нежесткости, а неравенства (4) – согласованием знаков. Если в задаче (1) ищутся не локальные минимумы, а локальные максимумы, то в этом случае неравенства $\lambda_i \geq 0$ в (4) заменяются на $\lambda_i \leq 0$, а неравенство $\lambda_0 \geq 0$ сохраняется.

Пусть точка a лежит в области определения задачи (1). Введем обозначения

$$I(a) = \{i \mid g_i(a) = 0\},$$

$$\Pi(a) = \{h \in \mathbb{R}^n \mid g'_i(a)h = 0, \quad i \in I(a)\},$$

$$K(a) = \{h \in \mathbb{R}^n \mid f'(a)h \leq 0; \quad g'_i(a)h \leq 0, \quad i \leq s \wedge i \in I(a); \quad g'_i(a)h = 0, \quad i > s\}.$$

Элементы $i \in I(a)$ называют номерами активных ограничений задачи, подпространство $\Pi(a)$ – ядром активных ограничений, а множество $K(a)$ – конусом критических направлений в точке a . В [1, теорема 3.1] и [2, теорема 2.1] было доказано следующее необходимое условие второго порядка для экстремума в задаче (1).

Т е о р е м а 2. Пусть $f, g_i \in C^2(\mathbb{R}^n)$ и точка $a \in \mathbb{R}^n$ есть решение задачи (1). Тогда для любого вектора $v \in K(a)$ найдется такой набор параметров $\lambda \neq 0$, для которого выполняются условия (2) – (4) из предыдущей теоремы, справедливо неравенство $L''_{xx}(a, \lambda)[v^2] \geq 0$, и одновременно

существует линейное подпространство $\Pi \subset \Pi(a)$ коразмерности не больше $|I(a)|$ во всем \mathbb{R}^n , на котором вторая производная $L''_{xx}(a, \lambda)$ неотрицательно определена.

Сразу оговоримся, что в [1] и [2] эта теорема доказана в более общей ситуации, когда переменная x изменяется в любом (даже не топологическом) векторном пространстве X . Мы заменили X на \mathbb{R}^n лишь для того, чтобы избежать необходимости определять дифференцируемость и локальные экстремумы в X . В действительности доказываемые ниже результаты справедливы для любого X .

Подпространство Π , для которого выполняется заключение теоремы 2, мы будем называть *плоскостью Арутюнова*. Целью данной статьи является доказательство следующих двух замечаний.

З а м е ч а н и е 1. Для любого вектора $v \in \Pi(a)$ существует плоскость Арутюнова, содержащая v . Значит, плоскости Арутюнова заполняют все пространство $\Pi(a)$.

З а м е ч а н и е 2. Утверждение о том, что в условиях теоремы 2 любое *двумерное* подпространство $l \subset \Pi(a)$ содержится в некоторой плоскости Арутюнова, в общем случае неверно (в предположении, что размерность плоскостей Арутюнова больше единицы, иначе данное замечание тривиально).

Первое замечание доказывается совсем просто. Возьмем любой вектор $v \in \Pi(a)$. Заменяя, если потребуется, вектор v на $-v$, добьемся, чтобы он принадлежал $K(a)$. Построим для этого v набор параметров λ и плоскость Арутюнова Π из теоремы 2. Если $v \in \Pi$, то доказывать нечего. Поэтому будем считать, что $v \notin \Pi$. Рассмотрим линейное подпространство

$$\Pi_0 = \{h \in \Pi \mid L''_{xx}(a, \lambda)[v, h] = 0\}.$$

Его коразмерность в \mathbb{R}^n не больше $|I(a)| + 1$, а коразмерность линейной оболочки Π_0 и вектора v не больше $|I(a)|$. Обозначим эту линейную оболочку Π_v . Тогда любой вектор из Π_v представляется в виде $h + tv$, где $h \in \Pi_0$ и $t \in \mathbb{R}$. Для него

$$\begin{aligned} L''_{xx}(a, \lambda)[(h + tv)^2] &= L''_{xx}(a, \lambda)[h^2] + 2tL''_{xx}(a, \lambda)[v, h] + t^2L''_{xx}(a, \lambda)[v^2] = \\ &= L''_{xx}(a, \lambda)[h^2] + t^2L''_{xx}(a, \lambda)[v^2] \geq 0. \end{aligned}$$

Значит, Π_v является плоскостью Арутюнова, содержащей вектор v .

Чтобы доказать замечание 2, рассмотрим задачу

$$\begin{cases} z^2 - x^2 - y^2 \rightarrow \min, \\ x^2 - y^2 = 0, \\ xy = 0, \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

Очевидно, точка $a = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^{n+2}$ является ее решением, а соответствующее подпространство $\Pi(a)$ совпадает со всем \mathbb{R}^{n+2} . Определим двумерное подпространство

$$l = \{(x, y, z) \mid z = 0\} \subset \Pi(a).$$

Проверим, что сужение второго дифференциала функции Лагранжа на l не может быть отрицательным. Действительно, это сужение имеет вид

$$-2\lambda_0(dx^2 + dy^2) + 2\lambda_1(dx^2 - dy^2) + 2\lambda_2dxdy. \quad (6)$$

Если оно неотрицательно, то квадратичная форма $\lambda_1(dx^2 - dy^2) + \lambda_2dxdy$ тем более неотрицательна. Легко видеть, что это может быть лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Но тогда $\lambda_0 > 0$, и, следовательно,

форма (6) отрицательна на l . Полученное противоречие доказывает, что сужение второй производной от функции Лагранжа на l не может быть неотрицательным. А отсюда следует, что никакая плоскость Арутюнова (которая в данной задаче должна иметь размерность не меньше n) не может содержать подпространство l .

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф10Р–025).

Литература

1. Арутюнов А. В. Условия второго порядка в экстремальных задачах с конечномерным образом, 2-нормальные отображения // Известия РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60, № 1. С. 37–62.
2. Арутюнов А. В. Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М., 1997.

V. I. BAKHTIN

COMMENTS ON ONE A. V. ARUTYUNOV'S CONDITIONAL EXTREMUM THEOREM

Summary

We consider the standard conditional extremum problem and improve A. Arutyunov's second-order necessary condition. Namely, we show that Arutyunov's accompanying subspaces (of codimension equal to the number of active constraints) fill the whole of the kernel of active constraints.

РЭФЕРАТЫ

УДК 519.2

Бодягин И. А., Харин Ю. С. **Функция правдоподобия для цензурированных гауссовских временных рядов** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 4–14.

Для гауссовского временного ряда при наличии интервального цензурирования построено разложение функции правдоподобия в ряд. Найденное разложение иллюстрируется на примере регрессионной модели, в которой случайные ошибки наблюдений образуют гауссовский авторегрессионный временной ряд.

Ил. 1. Библиогр. – 15 назв.

УДК 517.53

Гриб Н. В. **Приближение сумматорными рациональными операторами 2π -периодических кусочно-выпуклых функций** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 15–23.

Найдена скорость приближения 2π -периодических кусочно-выпуклых функций сумматорными рациональными операторами типа Джексона.

Библиогр. – 8 назв.

УДК 517.948.32:517.544

Зверович Э. И. **Обобщение формул Сохоцкого** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 24–28.

Для интеграла по замкнутой гладкой кривой L

$$\Phi(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - z)^{n+1}}, \quad z \notin L,$$

при $z \rightarrow t \in L, z \notin L$ и при естественных ограничениях установлены следующие формулы для предельных значений

$$\Phi^\pm(t) = \pm \frac{1}{2} \varphi^{(n)}(t) + \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{n+1}}, \quad t \in L,$$

где интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару. Эти формулы обобщают классические формулы Сохоцкого.

Библиогр. – 3 назв.

УДК 517.987.1+517.986.225

Глаз А. Н. **Общий вид линейного непрерывного функционала на пространстве кусочно-непрерывных функций** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 29–34.

Рассматривается наименьшее замкнутое подпространство G в пространстве ограниченных функций на $[0, 1]$, содержащее все кусочно-непрерывные функции. Получены некоторые свойства мер на пространстве максимальных идеалов $M(G)$. Построено сопряженное пространство к G .

Библиогр. – 10 назв.

УДК 517.512.2

Дацык В. Т. **Обобщенные средние сопряженного интеграла Фурье функций с существенно ограниченной дробной производной** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 35–42.

На базе сопряженного интеграла Фурье с помощью введенного класса методов суммирования построены обобщенные средние для функций, имеющих дробные производные в смысле Римана–Лиувилля. Для построенных средних найдены формулы типа Вороновской с точностью до константы.

Библиогр. – 4 назв.

УДК 512.542

Воробьев С. Н. **О формациях Фишера конечных групп** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 43–48.

Класс Фиттинга \mathfrak{F} называют классом Фишера, если \mathfrak{F} замкнут относительно подгрупп вида PN , где P – силовская p -подгруппа и N – нормальная подгруппа группы $G \in \mathfrak{F}$. Если \mathfrak{F} одновременно является классом Фишера и формацией, то \mathfrak{F} называют формацией Фишера. Доказано, что ω -локальная формация является формацией Фишера в точности тогда, когда все значения ее канонического ω -локального спутника – формации Фишера.

Библиогр. – 13 назв.

УДК 512.542

Мехович А. П. **Прямые разложения τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 49–53.

Пусть $\{\mathfrak{F}_i / i \in I\}$ – произвольная система непустых формаций такая, что для любых двух различных $i, j \in I$ имеет место $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \emptyset$. Пусть $\mathfrak{F} = \otimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ – класс всех групп вида $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_r$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}$, ..., $A_r \in \mathfrak{F}_{i_r}$ для некоторых $i_1, i_2, \dots, i_r \in I$. Доказано, что формация \mathfrak{F} τ -замкнута n -кратно ω -композиционна в том и только в том случае, когда τ -замкнута n -кратно ω -композиционна каждая из формаций \mathfrak{F}_i .

Библиогр. – 13 назв.

УДК 511.36

Берник В. И., Гётце Ф., Коледа Д. В. **Эффективные регулярные системы** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 54–60.

Получена эффективная метрическая теорема, с помощью которой можно находить нижнюю границу высот целочисленных многочленов, действительные корни которых образуют регулярную систему. Это позволяет доказать существование действительных чисел с заданной мерой трансцендентности, оценки снизу для размерности Хаусдорфа в ряде задач теории диофантовых приближений.

Библиогр. – 8 назв.

УДК 511.42

Шлык В. А. **Совместные приближения натуральных чисел суммой целых алгебраических чисел** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 61–63.

В работе получены оценки для совместных приближений натуральных чисел суммой двух целых алгебраических чисел.

Библиогр. – 7 назв.

УДК 517.925.4

Лапуцкий А. И. **О новых алгебраических решениях системы Гарнье с двумя независимыми переменными** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 64–68.

Данная статья посвящена описанию новых классов алгебраических решений системы Гарнье с двумя независимыми переменными, которая является обобщением уравнений Пенлеве на случай многих переменных.

Библиогр. – 3 назв.

УДК 531.132.2

Борисевич С. А., Камлюк А. Н. **Модель гибкого стержня в трехмерном пространстве и ее применение для описания динамики падения ствола дерева** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 69–74.

В работе представлен эффективный метод, позволяющий моделировать динамическое поведение упругих стержней в трехмерном пространстве. Предложена модель, которая состоит из набора жестких фрагментов (стержней), соединенных упругими связями, позволяющими стержням изгибаться друг относительно друга в двух плоскостях и совершать крутильные движения. Пространственные повороты стержней описываются с помощью компонент кватернионов. На основании уравнений Лагранжа второго рода получены дифференциальные уравнения движения модели стержня. Представлен численный алгоритм их решения. Рассмотренный метод позволяет рассматривать динамику деформируемых стержней с различной геометрией и с различными упругими характеристиками.

В качестве примера рассмотрена динамика падения ствола дерева переменного сечения. Для вычисления силы сопротивления, действующей на крону дерева, введена диссипативная функция Релея.

Ил. 2. Библиогр. – 8 назв.

УДК 52–43; 524.85:531.51

Тихомиров В. В., Целков Ю. А. **Об ускорении аккреции на первичные черные дыры в присутствии дополнительных измерений** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 75–83.

Показано, что увеличение аккреционного роста на первичные черные дыры (ПЧД) в 5-мерной космологии мира на бране RSII приводит к существенному ужесточению ограничений на начальные распространённости ПЧД.

Также установлено, что значительное изменение свойств ПЧД в присутствии дополнительных измерений в ADD-модели приводит к эффективному захвату и торможению 6-мерной ПЧД в веществе белого карлика, что делает метод поиска многомерных ПЧД, основанный на поглощении ими плотных небесных тел, более реалистичным и эффективным в пределах 6-мерной планковской массы вплоть до 10^3 ТЭВ.

Ил. 3. Библиогр. – 24 назв.

УДК 530.145

Кудряшов В. В., Баран А. В. **Точные решения уравнения Шрёдингера для электрона в круговом квантовом кольце с учетом спин-орбитальных взаимодействий** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 84–88.

Получены точные решения уравнения Шрёдингера для электрона в двумерном полупроводниковом круговом квантовом кольце в присутствии спин-орбитальных взаимодействий Рашбы и Дрессельхауса равных интенсивностей. Конфайнмент моделируется реалистичной потенциальной ямой конечной глубины. Представлена зависимость уровней энергии от интенсивности спин-орбитального взаимодействия, относительной ширины кольца и глубины потенциальной ямы.

Табл. 3. Ил. 1. Библиогр. – 11 назв.

УДК 530.12

Рябушко А. П., Неманова И. Т., Жур Т. А. **Движение пробного тела в римановом пространстве-времени, порожденном неоднородной средой с притягивающим центром** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 89–92.

В постньютоновском приближении общей теории относительности получены первые интегралы дифференциальных уравнений геодезических линий риманова пространства-времени, метрика которого найдена в предыдущей работе авторов [1].

Библиогр. – 8 назв.

УДК 534.535

Анисимова А. Е., Кулак Г. В., Ропот П. И. **Преобразование световых пучков при брэгговской дифракции на частотно-модулированной ультразвуковой волне** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 93–96.

Исследованы особенности брэгговской дифракции ограниченных световых пучков на частотно-модулированном акустическом сигнале. Получено выражение для пространственного распределения амплитуды дифрагированного светового пучка в замкнутой форме. Показано, что пространственное распределение амплитуды дифрагированного пучка существенно трансформируется при изменении соотношения радиуса падающего светового пучка и пространственного периода модулирующей функции, переходя в многопиковую структуру брэгговского максимума.

Ил. 2. Библиогр. – 8 назв.

УДК 621.382.2

Коршунов Ф. П., Марченко И. Г. **Влияние электронного облучения при повышенных температурах на диффузионные p-n-переходы в кремнии** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 97–101.

Изучено поведение времени жизни неравновесных носителей заряда (τ_p), обратного тока (I_R) и прямого падения напряжения (U_F) в электронно-облученных ($E_{irr} = 6$ МэВ) промышленных p^+-n-n^+ -диодах при температурах облучения в интервале $T_{irr} = 20–400$ °С. Исследования проводились на образцах, изготовленных на монокристаллическом Si, легированном фосфором в процессе выращивания по Чохральскому (КЭФ) и с помощью ядерных реакций (КОФ). Показано, что путем выбора температурного режима технологического облучения можно решить проблему достижения малых значений τ_p при минимальном росте U_F и I_R в быстродействующих диодах. Установлено, что при сопоставимых изменениях величины τ_p в базовом слое диодов наилучшее соотношение U_F и I_R в образцах на КЭФ наблюдается при $T_{irr} = 300$ °С, а в образцах на КОФ – при $T_{irr} = 350$ °С.

Табл. 1. Ил. 2. Библиогр. – 17 назв.

УДК 537.622

Рыжковский В. М., Гончаров В. С. **Магнитная структура сплава $Mn_{1,3}Sb$ по данным нейтронной дифракции** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 102–106.

Выполнено нейтронографическое исследование исходных и термобарически обработанных ($P = 7$ ГПа, $T = 2300$ К) сплавов $Mn_{1,3}Sb$. Установлено, что при температурах 300 и 77 К сплавы являются ферромагнетиками. Магнитная структура представляет собой две подрешетки атомов марганца в октаэдрических узлах и в бипирамидальных междоузлиях с антипараллельно направленными и различными по величине атомными магнитными моментами.

Табл. 1. Ил. 3. Библиогр. – 11 назв.

УДК 519.6

Лиходед Н. А., Соболевский П. И. **Однородные зависимости в алгоритмах, порождаемые тайлами** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 107–113.

Исследуется тайлинг алгоритмов с однородными зависимостями. Получены выражения для явного описания всех зависимостей уровня тайлов. Показано, как следует выбирать свободные размеры тайлов специального вида для минимизации времени реализации алгоритма на кольце процессоров.

Библиогр. – 9 назв.

УДК 519.1

Найденко В. Г. **О сложности нахождения второго решения NP -полной задачи** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 114–118

При условии $NP \cap co-NP = P$ и $NP \neq P$, для любой NP -полной задачи, каждый пример которой либо не имеет решений, либо имеет по крайней мере два решения, можно построить полиномиальный алгоритм, который бы для заданного примера этой задачи при наличии одного решения находил второе решение.

Библиогр. – 4 назв.

УДК 530.1.535.3.

Гончаренко А. М. **Распространение эллиптических световых пучков в круглом селфоке** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 119–121.

Исследованы особенности распространения эллиптических световых пучков в круглом селфоке. Установлено, что пульсирующий эллиптический пучок имеет один и тот же пространственный период в обеих перпендикулярных плоскостях.

Библиогр. – 3 назв.

УДК 517.977

Бахтин В. И. **Замечания по поводу одной теоремы А. В. Арутюнова об условном экстремуме** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 122–124.

Рассматривается стандартная задача на условный экстремум с ограничениями типа равенств и неравенств. Для необходимого условия второго порядка, принадлежащего А. В. Арутюнову, доказывается следующее уточнение: сопровождающие подпространства (т. е. подпространства, на которых второй дифференциал функции Лагранжа неотрицателен и коразмерность которых равна числу активных ограничений в критической точке) заполняют собой все ядро активных ограничений. Кроме того, приводится пример такой задачи, у которой в ядре активных ограничений имеется двумерное подпространство, не лежащее ни в одном сопровождающем подпространстве

Библиогр. – 2 назв.